Notas Para o Curso de Medida e Integração

Daniel V. Tausk

Licença e Créditos

Créditos
Para fazer atribuição em derivados deste material, incluir a referência:
D. V. Tausk. Notas para o Curso de Medida e Integração (BY-SA).
com um link para https://github.com/leorolla/tauskmedida

Sumário

CAPÍTULO 1

Medida de Lebesgue e Espaços de Medida

1.1. Aritmética na Reta Estendida

Medidas associam números reais não negativos a conjuntos, mas a alguns conjuntos fica associado o valor *infinito*. Precisamos então tratar infinitudes como objetos que podem ser operados com somas e produtos. Introduzimos então formalmente a *reta estendida* que é a reta real usual acrescida de dois objetos $+\infty$, $-\infty$ e com operações e relação de ordem definidas de maneira natural. Por uma questão de completude, listamos nesta seção em detalhes várias definições e propriedades relacionadas à reta estendida. Na Subseção 1.1.1 definimos o conceito de limite de uma seqüência na reta estendida e na Subseção 1.1.2 formalizamos o conceito de soma de uma família (possivelmente infinita) de elementos não negativos da reta estendida.

As noções formalizadas nesta seção são de caráter bastante intuitivo e acreditamos que o leitor pode optar pela omissão de sua leitura sem prejuízo significativo de compreensão das seções seguintes.

1.1.1. Notação. Denotamos por $\mathbb{R}$ o corpo ordenado dos números reais.

Escolha dois objetos quaisquer não pertencentes à reta real $\mathbb{R}$ e denote-os por $+\infty$ e $-\infty$.

1.1.2. Definição. O conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ será chamado a *reta estendida*. Um elemento $a \in \overline{\mathbb{R}}$ é dito *finito* (resp., *infinito*) quando $a \in \mathbb{R}$ (resp., $a \notin \mathbb{R}$).

A natureza dos objetos $+\infty$ e $-\infty$ é totalmente irrelevante; o que importa é a forma como eles interagem com os números reais através das operações e relações que definiremos a seguir em $\overline{\mathbb{R}}$.

1.1.3. Definição. Dados $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, escrevemos $a < b$ e dizemos que a é *menor que* b quando uma das seguintes condições é satisfeita:

- $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ na ordem usual de $\mathbb{R}$;
- $b = +\infty$ e $a \neq +\infty$;
- $a = -\infty$ e $b \neq -\infty$.

Escrevemos $a > b$ quando $b < a$, $a \leq b$ quando $a < b$ ou $a = b$ e escrevemos $a \geq b$ quando $b \leq a$.

A relação binária $<$ define uma *relação de ordem total* na reta estendida $\overline{\mathbb{R}}$, ou seja, possui as seguintes propriedades:

- (*anti-reflexividade*) para todo $a \in \overline{\mathbb{R}}$, não é o caso que $a < a$;
- (*transitividade*) para todos $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$;

- (*tricotomia*) dados $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ então $a < b$, $b < a$ ou $a = b$.

A relação de ordem em $\overline{\mathbb{R}}$ nos permite introduzir as notações de intervalo $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ e $]a, b[$, com $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, da maneira usual. Se A é um subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ podemos definir também o *supremo* (resp., o *ínfimo*) de A em $\overline{\mathbb{R}}$ como sendo a menor cota superior (resp., a maior cota inferior) de A em $\overline{\mathbb{R}}$. O supremo (resp., o ínfimo) de um conjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ é denotado por $\sup A$ (resp., $\inf A$); se $(a_i)_{i \in I}$ é uma família em $\overline{\mathbb{R}}$, denotamos também o supremo (resp., o ínfimo) do conjunto $\{a_i : i \in I\}$ por $\sup_{i \in I} a_i$ (resp., $\inf_{i \in I} a_i$). No Exercício 1.1 pedimos ao leitor para mostrar que todo subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ possui supremo e ínfimo.

1.1.4. Definição. A *soma* na reta estendida é definida da seguinte forma:

- se $a, b \in \mathbb{R}$ então $a + b$ é igual à soma usual de a e b em $\mathbb{R}$;
- $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$, se $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $a \neq -\infty$;
- $(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$, se $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $a \neq +\infty$.

As somas $(+\infty) + (-\infty)$ e $(-\infty) + (+\infty)$ são consideradas *indefinidas*. Para $a \in \overline{\mathbb{R}}$ denotamos por $-a$ o elemento de $\overline{\mathbb{R}}$ definido pelas condições:

- se $a \in \mathbb{R}$ então $-a$ é o inverso de a com relação à soma de $\mathbb{R}$;
- se $a = +\infty$ então $-a = -\infty$;
- se $a = -\infty$ então $-a = +\infty$.

Para $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, escrevemos $a - b = a + (-b)$. Definimos também o *módulo* de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ fazendo $|a| = a$ para $a \geq 0$ e $|a| = -a$ para $a < 0$. O *produto* na reta estendida é definido da seguinte forma:

- se $a, b \in \mathbb{R}$ então $a \cdot b$ (ou, simplesmente, ab) é igual ao produto usual de a e b em $\mathbb{R}$;
- $ab = 0$ se $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $a = 0$ ou $b = 0$;
- $ab = ba = a$, se $a \in \{+\infty, -\infty\}$ e $b > 0$;
- $ab = ba = -a$, se $a \in \{+\infty, -\infty\}$ e $b < 0$.

Note que o produto é uma operação binária no conjunto $\overline{\mathbb{R}}$, mas a soma é apenas uma *operação binária parcialmente definida* em $\overline{\mathbb{R}}$, já que não atribuímos significado para $(+\infty) + (-\infty)$ e $(-\infty) + (+\infty)$. Note também que, de acordo com nossas convenções, $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0$; essa convenção é conveniente em teoria da medida, embora possa parecer estranha para quem está acostumado com as propriedades usuais de limites de funções.

Na proposição abaixo resumimos as propriedades da ordem e das operações de $\overline{\mathbb{R}}$; a demonstração é obtida simplesmente por uma verificação tediosa de diversos casos.

1.1.5. Proposição. *A ordem e as operações da reta estendida satisfazem as seguintes propriedades:*

- *a soma é associativa onde estiver bem-definida, i.e.,* $(a + b) + c = a + (b + c)$*, para todos* $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$*, desde que ou* $a, b, c \neq +\infty$ *ou* $a, b, c \neq -\infty$*;*

- *a soma é comutativa onde estiver bem-definida, i.e.,* $a + b = b + a$*, para todos* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$*, desde que ou* $a, b \neq +\infty$ *ou* $a, b \neq -\infty$*;*
- *o zero de* $\mathbb{R}$ *é o elemento neutro para a soma de* $\overline{\mathbb{R}}$*, i.e.,* $a + 0 = 0 + a = a$*, para todo* $a \in \overline{\mathbb{R}}$*;*
- *o produto é associativo, i.e.,* $(ab)c = a(bc)$*, para todos* $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$*;*
- *o produto é comutativo, i.e.,* $ab = ba$*, para todos* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$*;*
- *a unidade de* $\mathbb{R}$ *é o elemento neutro para o produto de* $\overline{\mathbb{R}}$*, i.e.,* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$*, para todo* $a \in \overline{\mathbb{R}}$*;*
- *a soma é distributiva com relação ao produto, i.e.,* $(a+b)c = ac+bc$*, para todos* $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$*, desde que as somas* $a + b$ *e* $ac + bc$ *estejam bem-definidas;*
- *a ordem é compatível com a soma, i.e., se* $a \leq b$ *então* $a+c \leq b+c$*, para todos* $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$*, desde que as somas* $a+c$ *e* $b+c$ *estejam bem-definidas;*
- *a ordem é compatível com o produto, i.e., se* $a \leq b$ *então* $ac \leq bc$*, para todos* $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ *com* $c \geq 0$*.* □

Algumas observações importantes seguem. A identidade $a + (-a) = 0$ é válida *apenas para* $a \in \mathbb{R}$; os elementos $+\infty$ e $-\infty$ não possuem inverso com respeito à soma. Em particular, as implicações:

$$a + c = b + c \Longrightarrow a = b \quad \text{e} \quad a = b + c \Longrightarrow a - c = b$$

são válidas apenas quando $c \in \mathbb{R}$. A implicação:

$$a < b \Longrightarrow a + c < b + c$$

é também *apenas válida para* $c \in \mathbb{R}$ e a implicação:

$$a < b \Longrightarrow ac < bc$$

é válida *apenas para* $0 < c < +\infty$.

1.1.1. Limites de seqüências na reta estendida. Limites de seqüências em $\overline{\mathbb{R}}$ podem ser definidos através da introdução de uma topologia em $\overline{\mathbb{R}}$ (veja Exercício 1.8). Para o leitor não familiarizado com a noção de espaço topológico, definimos a noção de limite de seqüência em $\overline{\mathbb{R}}$ diretamente.

1.1.6. Definição. Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência em $\overline{\mathbb{R}}$. Dizemos que $(a_k)_{k\geq 1}$ *converge* para um elemento $a \in \overline{\mathbb{R}}$ e escrevemos $a_k \to a$ se uma das situações abaixo ocorre:

- $a \in \mathbb{R}$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \geq 1$ tal que $a_k \in \left]a - \varepsilon, a + \varepsilon\right[$ para todo $k \geq k_0$;
- $a = +\infty$ e para todo $M < +\infty$ existe $k_0 \geq 1$ tal que $a_k > M$ para todo $k \geq k_0$;
- $a = -\infty$ e para todo $M > -\infty$ existe $k_0 \geq 1$ tal que $a_k < M$ para todo $k \geq k_0$.

Quando existe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ com $a_k \to a$ dizemos que a seqüência $(a_k)_{k\geq 1}$ é *convergente* em $\overline{\mathbb{R}}$. Nesse caso, é fácil mostrar que tal $a \in \overline{\mathbb{R}}$ é único e é chamado o *limite* da seqüência $(a_k)_{k\geq 1}$; denotâmo-lo por $\lim_{k\to\infty} a_k$.

Uma seqüência $(a_k)_{k\geq 1}$ em $\overline{\mathbb{R}}$ é dita *crescente* (resp., *decrescente*) se $a_k \leq a_{k+1}$ (resp., se $a_k \geq a_{k+1}$), para todo $k \geq 1$. Uma seqüência que é ou crescente ou decrescente é dita *monótona*. Deixamos a demonstração do seguinte resultado simples a cargo do leitor.

1.1.7. LEMA. *Toda seqüência monótona em $\overline{\mathbb{R}}$ é convergente em $\overline{\mathbb{R}}$. Mais especificamente, se $(a_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência crescente (resp., decrescente) em $\overline{\mathbb{R}}$ então $\lim_{k\to\infty} a_k = \sup_{k\geq 1} a_k$ (resp., $\lim_{k\to\infty} a_k = \inf_{k\geq 1} a_k$).*

DEMONSTRAÇÃO. Veja Exercício 1.2. □

Enunciamos a seguir as propriedades operatórias dos limites na reta estendida:

1.1.8. LEMA. *Sejam $(a_k)_{k\geq 1}$, $(b_k)_{k\geq 1}$ seqüências convergentes em $\overline{\mathbb{R}}$, com $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ e $\lim_{k\to\infty} b_k = b$. Então:*

- *se a soma $a + b$ estiver bem-definida então a soma $a_k + b_k$ está bem-definida para todo k suficientemente grande e:*

$$\lim_{k\to\infty} a_k + b_k = a + b;$$

- *se $\{|a|, |b|\} \neq \{0, +\infty\}$ então $\lim_{k\to\infty} a_k b_k = ab$.*

DEMONSTRAÇÃO. Veja Exercício 1.4. □

1.1.9. DEFINIÇÃO. Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência em $\overline{\mathbb{R}}$. O *limite superior* e o *limite inferior* da seqüência $(a_k)_{k\geq 1}$, denotados respectivamente por $\limsup_{k\to\infty} a_k$ e $\liminf_{k\to\infty} a_k$, são definidos por:

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \inf_{k\geq 1} \sup_{r\geq k} a_r, \quad \liminf_{k\to\infty} a_k = \sup_{k\geq 1} \inf_{r\geq k} a_r.$$

Temos a seguinte:

1.1.10. PROPOSIÇÃO. *Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência em $\overline{\mathbb{R}}$. Então:*

$$\liminf_{k\to\infty} a_k \leq \limsup_{k\to\infty} a_k,$$

sendo que a igualdade vale se e somente se a seqüência $(a_k)_{k\geq 1}$ é convergente; nesse caso:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \liminf_{k\to\infty} a_k = \limsup_{k\to\infty} a_k.$$

DEMONSTRAÇÃO. Veja Exercício 1.6 □

1.1.2. Somas infinitas em $[0,+\infty]$**.** Se $(a_i)_{i\in I}$ é uma família finita em $\overline{\mathbb{R}}$ então, já que a soma de $\overline{\mathbb{R}}$ é associativa e comutativa, podemos definir a soma $\sum_{i\in I} a_i$ de maneira óbvia, desde que $a_i \neq +\infty$ para todo $i \in I$ ou $a_i \neq -\infty$ para todo $i \in I$. Definiremos a seguir um significado para somas de famílias infinitas de elementos não negativos de $\overline{\mathbb{R}}$. É possível também definir somas de famílias que contenham elementos negativos de $\overline{\mathbb{R}}$, mas esse conceito não será necessário no momento.

1.1.11. Definição. Seja $(a_i)_{i\in I}$ uma família arbitrária em $[0,+\infty]$. A *soma* $\sum_{i\in I} a_i$ é definida por:

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\Big\{\sum_{i\in F} a_i : F \subset I \text{ um subconjunto finito}\Big\}.$$

Se I é o conjunto dos inteiros positivos então denotamos a soma $\sum_{i\in I} a_i$ também por $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$; segue facilmente do Lema 1.1.7 que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Deixamos a demonstração do seguinte resultado a cargo do leitor.

1.1.12. Proposição. *Somas de famílias em* $[0,+\infty]$ *satisfazem as seguintes propriedades:*

- *se* $(a_i)_{i\in I}$ *e* $(b_i)_{i\in I}$ *são famílias em* $[0,+\infty]$ *então:*
$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i;$$
- *se* $(a_i)_{i\in I}$ *é uma família em* $[0,+\infty]$ *e* $c \in [0,+\infty]$ *então*
$$\sum_{i\in I} c\, a_i = c \sum_{i\in I} a_i;$$
- *se* $(a_i)_{i\in I}$ *é uma família em* $[0,+\infty]$ *e se* $\phi : I' \to I$ *é uma função bijetora então:*
$$\sum_{i\in I'} a_{\phi(i)} = \sum_{i\in I} a_i;$$
- *se* $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *é uma família em* $[0,+\infty]$ *e se* $(J_i)_{i\in I}$ *é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos com* $\Lambda = \bigcup_{i\in I} J_i$ *então:*
$$\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{\lambda\in J_i} a_\lambda\Big).$$

Demonstração. Veja Exercício 1.7. □

A última propriedade no enunciado da Proposição 1.1.12 implica em particular que:

$$\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} a_{ij}\Big) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} a_{ij}\Big),$$

onde $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ é uma família em $[0,+\infty]$. Basta tomar $\Lambda = I \times J$ e $J_i = \{i\} \times J$, para todo $i \in I$.

1.2. O Problema da Medida

1.2.1. Notação. Denotamos por $\wp(X)$ o conjuntos de todas as partes de um conjunto X, por $\mathbb{Q}$ o corpo ordenado dos números racionais e por $\mathbb{Z}$ o anel dos números inteiros.

Queremos investigar a existência de uma função $\mu : \wp(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) dada uma seqüência $(A_n)_{n\ge1}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dois a dois disjuntos então:
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n);$$

(b) $\mu(A + x) = \mu(A)$, para todo $A \subset \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}$, onde:
$$A + x = \big\{a + x : a \in A\big\}$$
denota a *translação* de A por x;

(c) $0 < \mu\big([0,1]\big) < +\infty$.

Nosso objetivo é mostrar que tal função μ *não existe*. Antes disso, observamos algumas conseqüências simples das propriedades (a), (b) e (c) acima.

1.2.2. Lema. *Se uma função $\mu : \wp(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ satisfaz as propriedades (a), (b) e (c) acima então ela também satisfaz as seguintes propriedades:*

(d) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

(e) *dada uma coleção finita $(A_k)_{k=1}^{n}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dois a dois disjuntos então:*
$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k);$$

(f) *se $A \subset B \subset \mathbb{R}$ então $\mu(A) \le \mu(B)$;*

(g) *dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \le b$ então $\mu\big([a,b]\big) < +\infty$.*

Demonstração.

- *Prova de* (d).

  Tome $A_1 = [0,1]$ e $A_n = \emptyset$ para $n \ge 2$ na propriedade (a) e use a propriedade (c).

- *Prova de* (e).

  Tome $A_k = \emptyset$ para $k > n$ e use as propriedades (a) e (d).

- *Prova de* (f).

  Basta observar que a propriedade (e) implica que:
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A),$$

onde $\mu(B \setminus A) \geq 0$.

- *Prova de* (g).
  Seja n um inteiro positivo tal que $b < a + n$. As propriedades (e) e (f) implicam que:

$$\mu\big([a,b]\big) \leq \mu\big(\,[a,a+n[\,\big) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu\big(\,[a+k,a+k+1[\,\big)$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \mu\big([a+k,a+k+1]\big),$$

e as propriedades (b) e (c) implicam que:

$$\mu\big([a+k,a+k+1]\big) = \mu\big([0,1]\big) < +\infty,$$

para todo k. □

Finalmente, mostramos a seguinte:

1.2.3. Proposição. *Não existe uma função* $\mu : \wp(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ *satisfazendo as propriedades (a), (b) e (c) acima.*

Demonstração. Pelo Lema 1.2.2, as propriedades (a), (b) e (c) implicam as propriedades (d), (e), (f) e (g). Considere a relação binária $\sim$ no intervalo $[0,1]$ definida por:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q},$$

para todos $x, y \in [0,1]$. É fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência em $[0,1]$. Seja $A \subset [0,1]$ um *conjunto escolha* para $\sim$, i.e., A possui exatamente um elemento de cada classe de equivalência. Temos então que $x - y \notin \mathbb{Q}$, para todos $x, y \in A$ com $x \neq y$. Em particular, os conjuntos $(A+q)_{q\in\mathbb{Q}}$ são dois a dois disjuntos. Note também que para todo $x \in [0,1]$ existe $y \in A$ com $x - y \in \mathbb{Q}$; na verdade, temos $x - y \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, já que $x, y \in [0,1]$. Segue então que:

$$[0,1] \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (A+q) \subset [-1,2].$$

Como $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ é enumerável, as propriedades (a), (b) e (f) implicam:

$$\mu\big([0,1]\big) \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mu(A+q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mu(A) \leq \mu\big([-1,2]\big).$$

Agora, se $\mu(A) = 0$ concluímos que $\mu\big([0,1]\big) = 0$, contradizendo (c); se $\mu(A) > 0$ concluímos que $\mu\big([-1,2]\big) = +\infty$, contradizendo (g). □

1.3. Volume de Blocos Retangulares

1.3.1. Definição. Um *bloco retangular n-dimensional* é um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) que é ou vazio, ou da forma:

$$B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

onde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. O *volume* do bloco B acima é definido por:

$$|B| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n),$$

e por $|B| = 0$, caso $B = \emptyset$.

Quando $n = 1$ então um bloco retangular n-dimensional B é simplesmente um intervalo fechado e limitado (possivelmente um conjunto unitário ou vazio) e o escalar $|B|$ será chamado também o *comprimento* de B. Quando $n = 2$, um bloco retangular n-dimensional B será chamado também um *retângulo* e o escalar $|B|$ será chamado também a *área* de B.

1.3.2. Definição. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, então uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito $P \subset [a, b]$ com $a, b \in P$; tipicamente escrevemos $P : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ quando $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$. Os *sub-intervalos* de $[a, b]$ determinados pela partição P são os intervalos $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, k-1$. Denotamos por $\overline{P}$ o conjunto dos sub-intervalos de $[a, b]$ determinados por P, ou seja:

$$\overline{P} = \big\{[t_i, t_{i+1}]; i = 0, 1, \ldots, k-1\big\}.$$

Se $B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ é um bloco retangular n-dimensional com $|B| > 0$ (ou seja, $a_i < b_i$, para $i = 1, \ldots, n$), então uma *partição* de B é uma n-upla $P = (P_1, \ldots, P_n)$, onde P_i é uma partição do intervalo $[a_i, b_i]$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Os *sub-blocos* de B determinados pela partição P são os blocos retangulares n-dimensionais da forma $\prod_{r=1}^{n} I_r$, onde I_r é um sub-intervalo de $[a_r, b_r]$ determinado pela partição P_r, para $r = 1, \ldots, n$. Denotamos por $\overline{P}$ o conjunto dos sub-blocos de B determinados por P, ou seja:

$$\overline{P} = \big\{I_1 \times \cdots \times I_n : I_r \in \overline{P_r},\ r = 1, \ldots, n\big\}.$$

1.3.3. Lema. *Se $B = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ é um bloco retangular n-dimensional com $|B| > 0$ e se $P = (P_1, \ldots, P_n)$ é uma partição de B então:*

$$|B| = \sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P}} |\mathfrak{b}|.$$

Demonstração. Usamos indução em n. O caso $n = 1$ é trivial. Suponha então que $n > 1$ e que o resultado é válido para blocos retangulares de dimensão menor que n. Sejam $B' = \prod_{i=1}^{n-1} [a_i, b_i]$ e $P' = (P_1, \ldots, P_{n-1})$, de modo que P' é uma partição do bloco retangular $(n-1)$-dimensional B'. Escrevendo $P_n : a_n = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b_n$ temos:

$$|B| = |B'|(b_n - a_n) = \Big(\sum_{\mathfrak{b}' \in \overline{P'}} |\mathfrak{b}'|\Big)\Big(\sum_{i=0}^{k-1}(t_{i+1} - t_i)\Big) = \sum_{\substack{\mathfrak{b}' \in \overline{P'} \\ i=0,\ldots,k-1}} \big|\mathfrak{b}' \times [t_i, t_{i+1}]\big|.$$

A conclusão segue observando que os blocos $\mathfrak{b}' \times [t_i, t_{i+1}]$ com $\mathfrak{b}' \in \overline{P'}$ e $i = 0, \ldots, k-1$ são precisamente os sub-blocos de B determinados pela partição P. $\square$

1.3.4. Observação. Note que a interseção de dois blocos retangulares n-dimensionais é também um bloco retangular n-dimensional. Note também que se B e B' são blocos retangulares n-dimensionais com $B \subset B'$ então $|B| \le |B'|$.

1.3.5. Lema. *Sejam B, B_1, $\ldots$, B_t blocos retangulares n-dimensionais com $B \subset \bigcup_{r=1}^t B_r$. Então $|B| \le \sum_{r=1}^t |B_r|$.*

Demonstração. Em vista da Observação 1.3.4, substituindo cada bloco B_r por $B_r \cap B$ e descartando os índices r com $B_r \cap B = \emptyset$, podemos supor sem perda de generalidade que $B = \bigcup_{r=1}^t B_r$ e que $B_r \ne \emptyset$ para todo $r = 1, \ldots, t$. Podemos supor também que $|B| > 0$, senão o resultado é trivial. Escreva então $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ com $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$, e $B_r = \prod_{i=1}^n [a_i^r, b_i^r]$ com $a_i^r \le b_i^r$, $i = 1, \ldots, n$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, o conjunto

$$P_i = \{a_i, b_i\} \cup \{a_i^r, b_i^r ; r = 1, \ldots, t\}$$

é uma partição do intervalo $[a_i, b_i]$ e portanto $P = (P_1, \ldots, P_n)$ é uma partição do bloco B. Para cada $r = 1, \ldots, t$ com $|B_r| > 0$, tomamos $P_i^r = P_i \cap [a_i^r, b_i^r]$, $i = 1, \ldots, n$ e $P^r = (P_1^r, \ldots, P_n^r)$, de modo que P^r é uma partição do bloco B_r. Temos que se $\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$ é um sub-bloco de B determinado pela partição P então existe um índice $r = 1, \ldots, t$ tal que $|B_r| > 0$ e $\mathfrak{b}$ é um sub-bloco de B_r determinado pela partiação P^r. De fato, como $B = \bigcup_{r=1}^t B_r$ então $\prod_{i=1}^n]\alpha_i, \beta_i[$ intercepta B_r, para algum $r = 1, \ldots, t$ tal que[1] $|B_r| > 0$. Daí é fácil ver que $[\alpha_i, \beta_i]$ é um sub-intervalo de $[a_i^r, b_i^r]$ determinado pela partição P_i^r para $i = 1, \ldots, n$ e portanto $\mathfrak{b}$ é um sub-bloco de B_r determinado pela partição P^r. Mostramos então que:

$$\overline{P} \subset \bigcup_{\substack{r=1,\ldots,t \\ |B_r|>0}} \overline{P^r}.$$

[1]Os blocos de volume zero são conjuntos fechados de interior vazio e portanto a união de um número finito deles também tem interior vazio. Assim, o aberto não vazio $\prod_{i=1}^n]\alpha_i, \beta_i[$ não pode estar contido na união dos blocos B_r de volume zero.

A conclusão segue agora do Lema 1.3.3 observando que:

$$|B| = \sum_{\mathfrak{b}\in\overline{P}} |\mathfrak{b}| \le \sum_{\substack{r=1,\ldots,t\\ |B_r|>0}} \sum_{\mathfrak{b}\in\overline{P^r}} |\mathfrak{b}| = \sum_{r=1}^{t} |B_r|. \qquad \square$$

1.4. Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$

1.4.1. Definição. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto arbitrário. A *medida exterior de Lebesgue* de A, denotada por $\mathfrak{m}^*(A)$, é definida como sendo o ínfimo do conjunto de todas as somas da forma $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$, onde $(B_k)_{k\ge1}$ é uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais com $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$; em símbolos:

$$\mathfrak{m}^*(A) = \inf \mathcal{C}(A),$$

onde:

(1.4.1)

$$\mathcal{C}(A) = \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,\ B_k \text{ bloco retangular } n\text{-dimensional, para todo } k \ge 1 \Big\}.$$

Note que é sempre possível cobrir um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ com uma coleção enumerável de blocos retangulares n-dimensionais (i.e., $\mathcal{C}(A) \neq \emptyset$), já que, por exemplo, $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k,k]^n$. Obviamente temos $\mathfrak{m}^*(A) \in [0,+\infty]$, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$.

1.4.2. Observação. Todo subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ possui medida exterior finita. De fato, se $A \subset \mathbb{R}^n$ é limitado então existe um bloco retangular n-dimensional B contendo A. Tomando $B_1 = B$ e $B_k = \emptyset$ para $k \ge 2$, temos $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ e portanto $\mathfrak{m}^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| = |B| < +\infty$. Veremos logo adiante (Corolários 1.4.6 e 1.4.7) que a recíproca dessa afirmação não é verdadeira, i.e., subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ com medida exterior finita não precisam ser limitados.

1.4.3. Lema. *Se $B \subset \mathbb{R}^n$ é um bloco retangular n-dimensional então:*

$$\mathfrak{m}^*(B) = |B|,$$

ou seja, a medida exterior de um bloco retangular n-dimensional coincide com seu volume.

Demonstração. Tomando $B_1 = B$ e $B_k = \emptyset$ para $k \ge 2$, obtemos uma cobertura $(B_k)_{k\ge1}$ de B por blocos retangulares com $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| = |B|$; isso mostra que $\mathfrak{m}^*(B) \le |B|$. Para mostrar a desigualdade oposta, devemos escolher uma cobertura arbitrária $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ de B por blocos retangulares B_k e mostrar que $|B| \le \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$. Seja dado $\varepsilon > 0$ e seja para cada $k \ge 1$, B'_k um bloco retangular n-dimensional que contém B_k no seu interior e tal que $|B'_k| \le |B_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Os interiores dos blocos B'_k, $k \ge 1$, constituem então uma cobertura aberta do compacto B e dessa cobertura aberta podemos extrair uma subcobertura finita; existe portanto $t \geq 1$ tal que $B \subset \bigcup_{k=1}^t B'_k$. Usando o Lema 1.3.5 obtemos:

$$|B| \leq \sum_{k=1}^t |B'_k| \leq \sum_{k=1}^t \Big(|B_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) \leq \Big(\sum_{k=1}^\infty |B_k|\Big) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, a conclusão segue. □

1.4.4. Lema. *Se $A_1 \subset A_2 \subset \mathbb{R}^n$ então $\mathfrak{m}^*(A_1) \leq \mathfrak{m}^*(A_2)$.*

Demonstração. Basta observar que $\mathcal{C}(A_2) \subset \mathcal{C}(A_1)$ (recorde (1.4.1)). □

1.4.5. Lema. *Se $A_1, \ldots, A_t$ são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ então:*

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^t A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^t \mathfrak{m}^*(A_k).$$

Além do mais, se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ então:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathfrak{m}^*(A_k).$$

Demonstração. Como $\mathfrak{m}^*(\emptyset) = 0$, tomando $A_k = \emptyset$ para $k > t$, podemos considerar apenas o caso de uma seqüência infinita de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Seja dado $\varepsilon > 0$. Para cada $k \geq 1$ existe uma cobertura $A_k \subset \bigcup_{j=1}^\infty B_k^j$ de A_k por blocos retangulares n-dimensionais B_k^j de modo que:

$$\sum_{j=1}^\infty |B_k^j| \leq \mathfrak{m}^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Daí $(B_k^j)_{k,j\geq 1}$ é uma cobertura enumerável do conjunto $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$ por blocos retangulares n-dimensionais e portanto:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |B_k^j| \leq \sum_{k=1}^\infty \Big(\mathfrak{m}^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) = \Big(\sum_{k=1}^\infty \mathfrak{m}^*(A_k)\Big) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, a conclusão segue. □

1.4.6. Corolário. *A união de uma coleção enumerável de conjuntos de medida exterior nula tem medida exterior nula. Em particular, todo conjunto enumerável tem medida exterior nula.* □

1.4.7. Corolário. *Dado $i = 1, \ldots, n$ e $c \in \mathbb{R}$ então todo subconjunto do hiperplano afim $\big\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = c\big\}$ tem medida exterior nula.*

Demonstração. Basta observar que $\big\{x \in \mathbb{R}^n : x_i = c\big\} = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$, onde:

$$B_k = \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_i = c \text{ e } |x_j| \leq k,\ j = 1, \ldots, n,\ j \neq i\big\}$$

é um bloco retangular n-dimensional de volume zero. □

1.4.8. COROLÁRIO. *Todo subconjunto da fronteira de um bloco retangular n-dimensional tem medida exterior nula.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que a fronteira de um bloco retangular n-dimensional é uma união finita de blocos retangulares n-dimensionais de volume zero. □

1.4.9. COROLÁRIO. *Sejam $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ tais que $\mathfrak{m}^*(A_1) < +\infty$ ou $\mathfrak{m}^*(A_2) < +\infty$; então:*

$$\mathfrak{m}^*(A_1) - \mathfrak{m}^*(A_2) \le \mathfrak{m}^*(A_1 \setminus A_2). \tag{1.4.2}$$

DEMONSTRAÇÃO. Como $A_1 \subset (A_1 \setminus A_2) \cup A_2$, os Lemas 1.4.4 e 1.4.5 implicam que:

$$\mathfrak{m}^*(A_1) \le \mathfrak{m}^*(A_1 \setminus A_2) + \mathfrak{m}^*(A_2). \tag{1.4.3}$$

Se $\mathfrak{m}^*(A_2) = +\infty$ e $\mathfrak{m}^*(A_1) < +\infty$, a desigualdade (1.4.2) é trivial; se $\mathfrak{m}^*(A_2) < +\infty$, ela segue de (1.4.3). □

1.4.10. LEMA. *A medida exterior é* invariante por translação*, i.e., dados um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ então:*

$$\mathfrak{m}^*(A + x) = \mathfrak{m}^*(A),$$

onde $A + x = \big\{a + x : a \in A\big\}$ denota a translação *de A por x.*

DEMONSTRAÇÃO. É fácil ver que se B é um bloco retangular n-dimensional então $B + x$ também é um bloco retangular n-dimensional e:

$$|B + x| = |B|;$$

em particular, se $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ é uma cobertura de A por blocos retangulares n-dimensionais então $A + x \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(B_k + x)$ é uma cobertura de $A + x$ por blocos retangulares n-dimensionais e $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k + x| = \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$. Isso mostra que $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(A + x)$ (recorde (1.4.1)). Como $A = (A + x) + (-x)$, o mesmo argumento mostra que $\mathcal{C}(A + x) \subset \mathcal{C}(A)$; logo:

$$\mathfrak{m}^*(A) = \inf \mathcal{C}(A) = \inf \mathcal{C}(A + x) = \mathfrak{m}^*(A + x). \qquad \square$$

1.4.11. NOTAÇÃO. Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, denotamos por $\overset{\circ}{A}$ ou por $\mathrm{int}(A)$ o interior do conjunto A.

1.4.12. LEMA. *Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$ então existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ com $A \subset U$ e $\mathfrak{m}^*(U) \le \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ uma cobertura de A por blocos retangulares n-dimensionais tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \le \mathfrak{m}^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Para cada $k \ge 1$, seja B'_k um bloco retangular que contém B_k no seu interior e tal que

$|B'_k| \le |B_k| + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Seja $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{int}(B'_k)$. Temos que U é aberto e $U \supset A$; além do mais, usando os Lemas 1.4.4 e 1.4.5 obtemos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^*(U) \le \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B'_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(B'_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |B'_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} \Big(|B_k| + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\Big) \\ = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |B_k|\Big) + \frac{\varepsilon}{2} \le \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

Note que *não podemos* concluir do Lema 1.4.12 que $\mathfrak{m}^*(U \setminus A) \le \varepsilon$, nem mesmo se $\mathfrak{m}^*(A) < +\infty$; quando A tem medida exterior finita, o Corolário 1.4.9 nos garante que $\mathfrak{m}^*(U) - \mathfrak{m}^*(A) \le \mathfrak{m}^*(U \setminus A)$, mas veremos adiante que é possível que a desigualdade estrita ocorra.

1.4.13. Definição. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito (*Lebesgue*) *mensurável* se para todo $\varepsilon > 0$, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon$.

1.4.14. Observação. Obviamente, todo aberto em $\mathbb{R}^n$ é mensurável; de fato, se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, podemos tomar $U = A$ na Definição 1.4.13, para todo $\varepsilon > 0$.

1.4.15. Lema. *A união de uma coleção enumerável de subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ é mensurável.*

Demonstração. Seja $(A_k)_{k\ge1}$ uma seqüência de subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$ então, para cada $k \ge 1$, podemos encontrar um aberto U_k contendo A_k tal que $\mathfrak{m}^*(U_k \setminus A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Tomando $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ então U é aberto, U contém $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e:

$$\mathfrak{m}^*(U \setminus A) \le \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k \setminus A_k)\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(U_k \setminus A_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon. \quad \square$$

1.4.16. Lema. *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com medida exterior nula é mensurável.*

Demonstração. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathfrak{m}^*(A) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ então, pelo Lema 1.4.12, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(U) \le \varepsilon$. Concluímos então que:

$$\mathfrak{m}^*(U \setminus A) \le \mathfrak{m}^*(U) \le \varepsilon. \quad \square$$

1.4.17. Notação. No que segue, $d(x, y)$ denota a *distância Euclideana* entre os pontos $x, y \in \mathbb{R}^n$, i.e., $d(x, y) = \|x - y\|$, onde $\|x\|$ denota a *norma Euclideana* de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, definida por $\|x\| = \big(\sum_{i=1}^n x_i^2\big)^{\frac{1}{2}}$. Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e um subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}^n$ denotamos por $d(x, A)$ a *distância entre x e A* definida por:

$$d(x, A) = \inf \big\{ d(x, y) : y \in A \big\},$$

e dados subconjuntos não vazios $A, B \subset \mathbb{R}^n$ denotamos por $d(A,B)$ a *distância entre os conjuntos A e B* definida por:

$$d(A,B) = \inf\big\{d(x,y) : x \in A,\ y \in B\big\}.$$

1.4.18. Lema. *Dados subconjuntos $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ com $d(A_1, A_2) > 0$ então $\mathfrak{m}^*(A_1 \cup A_2) = \mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}^*(A_2)$.*

Demonstração. Em vista do Lema 1.4.5 é suficiente mostrar a desigualdade:

$$\mathfrak{m}^*(A_1 \cup A_2) \geq \mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}^*(A_2).$$

Para isso, seja $A_1 \cup A_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ uma cobertura de $A_1 \cup A_2$ por blocos retangulares n-dimensionais B_k e vamos mostrar que:

$$\mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}^*(A_2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|. \tag{1.4.4}$$

Como $d(A_1, A_2) > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(x,y) \geq \varepsilon$, para todos $x \in A_1$, $y \in A_2$. Para cada $k \geq 1$ com $|B_k| > 0$, podemos escolher uma partição P_k de B_k de modo que os sub-blocos de B_k determinados por P_k tenham todos diâmetro menor do que ε. Seja $\overline{P_k^1}$ (respectivamente, $\overline{P_k^2}$) o conjunto dos sub-blocos de B_k determinados por P_k que interceptam A_1 (respectivamente, interceptam A_2). Um bloco de diâmetro menor do que ε não pode interceptar ambos os conjuntos A_1 e A_2 e portanto $\overline{P_k^1}$ e $\overline{P_k^2}$ são subconjuntos disjuntos de $\overline{P_k}$. Segue do Lema 1.3.3 que:

$$\sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P_k^1}} |\mathfrak{b}| + \sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P_k^2}} |\mathfrak{b}| \leq |B_k|. \tag{1.4.5}$$

Como $A_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, temos que a coleção formada pelos blocos B_k com $|B_k| = 0$ e pelos blocos pertencentes a $\overline{P_k^1}$ para algum k com $|B_k| > 0$ constitui uma cobertura enumerável de A_1 por blocos retangulares n-dimensionais; logo:

$$\mathfrak{m}^*(A_1) \leq \sum_{\substack{k \geq 1 \\ |B_k| > 0}} \sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P_k^1}} |\mathfrak{b}|. \tag{1.4.6}$$

Similarmente:

$$\mathfrak{m}^*(A_2) \leq \sum_{\substack{k \geq 1 \\ |B_k| > 0}} \sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P_k^2}} |\mathfrak{b}|. \tag{1.4.7}$$

Somando as desigualdades (1.4.6) e (1.4.7) e usando (1.4.5) obtemos (1.4.4), o que completa a demonstração. □

1.4.19. Corolário. *Se $K_1, \ldots, K_t$ são subconjuntos compactos dois a dois disjuntos de $\mathbb{R}^n$ então $\mathfrak{m}^*\big(\bigcup_{i=1}^{t} K_i\big) = \sum_{i=1}^{t} \mathfrak{m}^*(K_i)$.*

DEMONSTRAÇÃO. O caso $t = 2$ segue do Lema 1.4.18, observando que a distância entre compactos disjuntos é positiva. O caso geral segue por indução. □

1.4.20. COROLÁRIO. *Se $B_1, \ldots, B_t$ são blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos então* $\mathfrak{m}^*\big(\bigcup_{r=1}^t B_r\big) = \sum_{r=1}^t |B_r|$.

DEMONSTRAÇÃO. Dado $\varepsilon > 0$, podemos para cada $r = 1, \ldots, t$ encontrar um bloco retangular n-dimensional B_r' contido no interior de B_r e satisfazendo $|B_r'| \geq (1 - \varepsilon)|B_r|$ (note que no caso $|B_r| = 0$ podemos tomar $B_r' = \emptyset$). Os blocos B_r', $r = 1, \ldots, t$ são subconjuntos compactos dois a dois disjuntos de $\mathbb{R}^n$ e portanto o Corolário 1.4.19 nos dá:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^t B_r\Big) \geq \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^t B_r'\Big) = \sum_{r=1}^t \mathfrak{m}^*(B_r') = \sum_{r=1}^t |B_r'| \geq (1 - \varepsilon) \sum_{r=1}^t |B_r|.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^t B_r\Big) \geq \sum_{r=1}^t |B_r|.$$

A desigualdade oposta segue do Lema 1.4.5. □

1.4.21. COROLÁRIO. *Se $(B_r)_{r\geq 1}$ é uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos então:*

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^\infty B_r\Big) = \sum_{r=1}^\infty |B_r|.$$

DEMONSTRAÇÃO. O Corolário 1.4.20 nos dá:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^\infty B_r\Big) \geq \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^t B_r\Big) = \sum_{r=1}^t |B_r|,$$

para todo $t \geq 1$. Fazendo $t \to \infty$ obtemos:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^\infty B_r\Big) \geq \sum_{r=1}^\infty |B_r|.$$

A desigualdade oposta segue do Lema 1.4.5. □

1.4.22. DEFINIÇÃO. Um *cubo n-dimensional* é um bloco retangular n-dimensional não vazio $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ tal que:

$$b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \cdots = b_n - a_n;$$

o valor comum aos escalares $b_i - a_i$ é chamado a *aresta* de B.

1.4.23. LEMA. *Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto então existe um conjunto enumerável $\mathcal{R}$ de cubos n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos tal que $U = \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$. Em particular, U é igual à união de uma coleção enumerável de blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos.*

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $k \geq 1$ seja $\mathcal{R}_k$ o conjunto de todos os cubos n-dimensionais de aresta $\frac{1}{2^k}$ e com vértices em pontos de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas são múltiplos inteiros de $\frac{1}{2^k}$; mais precisamente:

$$\mathcal{R}_k = \Big\{ \big[\tfrac{a_1}{2^k}, \tfrac{a_1+1}{2^k}\big] \times \cdots \times \big[\tfrac{a_n}{2^k}, \tfrac{a_n+1}{2^k}\big] : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Cada $\mathcal{R}_k$ é portanto um conjunto enumerável de cubos n-dimensionais. As seguintes propriedades são de fácil verificação:

(a) os cubos pertencentes a $\mathcal{R}_k$ possuem interiores dois a dois disjuntos, para todo $k \geq 1$;
(b) $\mathbb{R}^n = \bigcup_{B \in \mathcal{R}_k} B$, para todo $k \geq 1$;
(c) dados $k, l \geq 1$ com $k \geq l$ então todo cubo pertencente a $\mathcal{R}_k$ está contido em algum cubo pertencente a $\mathcal{R}_l$;
(d) todo cubo pertencente a $\mathcal{R}_k$ tem diâmetro igual a $\frac{\sqrt{n}}{2^k}$.

Construiremos agora indutivamente uma seqüência $(\mathcal{R}'_k)_{k\geq 1}$ onde cada $\mathcal{R}'_k$ é um subconjunto de $\mathcal{R}_k$. Seja $\mathcal{R}'_1$ o conjunto dos cubos $B \in \mathcal{R}_1$ tais que $B \subset U$. Supondo $\mathcal{R}'_i$ construído para $i = 1, \ldots, k$, seja $\mathcal{R}'_{k+1}$ o conjunto dos cubos $B \in \mathcal{R}_{k+1}$ que estão contidos em U e que tem interior disjunto do interior de todos os cubos pertencentes a $\bigcup_{i=1}^k \mathcal{R}'_i$. Tome $\mathcal{R} = \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{R}'_k$. Como cada $\mathcal{R}_k$ é enumerável, segue que $\mathcal{R}$ é enumerável. Afirmamos que os cubos pertencentes a $\mathcal{R}$ possuem interiores dois a dois disjuntos. De fato, sejam $B_1, B_2 \in \mathcal{R}$ cubos distintos, digamos $B_1 \in \mathcal{R}'_k$ e $B_2 \in \mathcal{R}'_l$ com $k \geq l$. Se $k > l$ então, por construção, o interior de B_1 é disjunto do interior de qualquer cubo pertencente a $\bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{R}'_i$; em particular, o interior de B_1 é disjunto do interior de B_2. Se $k = l$, segue da propriedade (a) acima que os cubos B_1 e B_2 possuem interiores disjuntos. Para terminar a demonstração, verifiquemos que $U = \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$. Obviamente temos $\bigcup_{B\in\mathcal{R}} B \subset U$. Seja $x \in U$. Como U é aberto, existe $k \geq 1$ tal que a bola fechada de centro x e raio $\frac{\sqrt{n}}{2^k}$ está contida em U. Em vista das propriedades (b) e (d) acima, vemos que existe $B \in \mathcal{R}_k$ com $x \in B$ e, além disso, $B \subset U$. Se $B \in \mathcal{R}'_k$ então $x \in B \in \mathcal{R}$; caso contrário, existem $l < k$ e um cubo $B_1 \in \mathcal{R}'_l$ tal que os interiores de B e B_1 se interceptam. Em vista da propriedade (c), existe um cubo $B_2 \in \mathcal{R}_l$ contendo B. Daí $B_1, B_2 \in \mathcal{R}_l$ e os interiores de B_1 e B_2 se interceptam; a propriedade (a) implica então que $B_1 = B_2$ e portanto $x \in B \subset B_2 = B_1 \in \mathcal{R}$. Em qualquer caso, mostramos que $x \in \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$, o que completa a demonstração. □

1.4.24. LEMA. *Todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto e seja dado $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 1.4.12 existe um aberto $U \supset K$ tal que $\mathfrak{m}^*(U) \leq \mathfrak{m}^*(K) + \varepsilon$. Vamos mostrar que $\mathfrak{m}^*(U \setminus K) \leq \varepsilon$. Pelo Lema 1.4.23, o aberto $U \setminus K$ pode ser escrito como uma união enumerável $U \setminus K = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ de blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos. Para cada $t \geq 1$ os conjuntos K e $\bigcup_{k=1}^t B_k$ são compactos e disjuntos; os Corolários 1.4.19 e

1.4.20 implicam então que:

$$\mathfrak{m}^*(K)+\sum_{k=1}^t |B_k| = \mathfrak{m}^*(K)+\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^t B_k\Big) = \mathfrak{m}^*\Big(K\cup\bigcup_{k=1}^t B_k\Big) \le \mathfrak{m}^*(U).$$

Como K é limitado, a Observação 1.4.2 nos diz que $\mathfrak{m}^*(K) < +\infty$ e portanto a desigualdade acima implica que:

$$\sum_{k=1}^t |B_k| \le \mathfrak{m}^*(U) - \mathfrak{m}^*(K) \le \varepsilon.$$

Como $t \ge 1$ é arbitrário, concluímos que $\sum_{k=1}^\infty |B_k| \le \varepsilon$ e, finalmente, o Corolário 1.4.21 nos dá $\mathfrak{m}^*(U\setminus K)\le\varepsilon$. □

1.4.25. COROLÁRIO. *Todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $F\subset\mathbb{R}^n$ é fechado então $F=\bigcup_{k=1}^\infty \big(F\cap[-k,k]^n\big)$ é uma união enumerável de compactos. A conclusão segue do Lema 1.4.15. □

1.4.26. DEFINIÇÃO. Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é dito *de tipo G_δ* (ou, simplesmente, um *conjunto G_δ*) se pode ser escrito como uma interseção de uma coleção enumerável de abertos de $\mathbb{R}^n$. Similarmente, um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é dito *de tipo F_σ* (ou, simplesmente, um *conjunto F_σ*) se pode ser escrito como uma união de uma coleção enumerável de fechados de $\mathbb{R}^n$.

Obviamente o complementar de um conjunto de tipo G_δ é de tipo F_σ (e vice-versa).

1.4.27. COROLÁRIO. *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de tipo F_σ é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Corolário 1.4.25 e do Lema 1.4.15. □

1.4.28. LEMA. *Se $A\subset\mathbb{R}^n$ é mensurável então existe um subconjunto Z de $\mathbb{R}^n$ de tipo G_δ tal que $A\subset Z$ e $\mathfrak{m}^*(Z\setminus A)=0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para todo $k\ge 1$ existe um aberto $U_k\subset\mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(U_k\setminus A)<\frac{1}{k}$. Daí o conjunto $Z=\bigcap_{k=1}^\infty U_k$ é um G_δ que contém A e:

$$\mathfrak{m}^*(Z\setminus A)\le\mathfrak{m}^*(U_k\setminus A)<\frac{1}{k},$$

para todo $k\ge 1$. Logo $\mathfrak{m}^*(Z\setminus A)=0$. □

1.4.29. COROLÁRIO. *O complementar de um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$ também é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $A\subset\mathbb{R}^n$ um subconjunto mensurável. Pelo Lema 1.4.28 existe um conjunto Z de tipo G_δ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(Z\setminus A)=0$. Daí $Z^{\mathrm{c}}\subset A^{\mathrm{c}}$ e $A^{\mathrm{c}}\setminus Z^{\mathrm{c}}=Z\setminus A$; logo:

$$A^{\mathrm{c}}=Z^{\mathrm{c}}\cup(Z\setminus A).$$

O conjunto Z^{c} é de tipo F_σ e portanto mensurável, pelo Corolário 1.4.27. A conclusão segue dos Lemas 1.4.15 e 1.4.16. □

1.4.30. COROLÁRIO. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável então para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ contido em A tal que $\mathfrak{m}^*(A \setminus F) < \varepsilon$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Corolário 1.4.29, A^c é mensurável e portanto existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo A^c tal que $\mathfrak{m}^*(U \setminus A^c) < \varepsilon$. Tomando $F = U^c$ então F é fechado e $F \subset A$. Como $A \setminus F = U \setminus A^c$, segue que $\mathfrak{m}^*(A \setminus F) < \varepsilon$. □

1.4.31. COROLÁRIO. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável então existe um subconjunto W de $\mathbb{R}^n$ de tipo F_σ tal que $W \subset A$ e $\mathfrak{m}^*(A \setminus W) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Corolário 1.4.29, A^c também é mensurável e portanto, pelo Lema 1.4.28 existe um subconjunto Z de $\mathbb{R}^n$ de tipo G_δ tal que $A^c \subset Z$ e $\mathfrak{m}^*(Z \setminus A^c) = 0$. Tomando $W = Z^c$ então W é de tipo F_σ e $W \subset A$. Como $A \setminus W = Z \setminus A^c$, segue que $\mathfrak{m}^*(A \setminus W) = 0$. □

1.4.32. DEFINIÇÃO. Seja X um conjunto arbitrário. Uma *álgebra* de partes de X é um subconjunto não vazio $\mathcal{A} \subset \wp(X)$ satisfazendo as seguintes condições:

(a) se $A \in \mathcal{A}$ então $A^c \in \mathcal{A}$;
(b) se $A, B \in \mathcal{A}$ então $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Uma *σ-álgebra* de partes de X é um subconjunto não vazio $\mathcal{A} \subset \wp(X)$ satisfazendo a condição (a) acima e também a condição:

(b') se $(A_k)_{k \ge 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Note que toda σ-álgebra de partes de X é também uma álgebra de partes de X. De fato, se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X e se $A, B \in \mathcal{A}$, podemos tomar $A_1 = A$ e $A_k = B$ para todo $k \ge 2$ na condição (b'); daí $A \cup B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

1.4.33. OBSERVAÇÃO. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra (em particular, se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra) de partes de X então $X \in \mathcal{A}$ e $\emptyset \in \mathcal{A}$. De fato, como $\mathcal{A} \ne \emptyset$, existe algum elemento $A \in \mathcal{A}$. Daí $A^c \in \mathcal{A}$ e portanto $X = A \cup A^c \in \mathcal{A}$; além do mais, $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$.

1.4.34. TEOREMA. *A coleção de todos os subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ é uma σ-álgebra de partes de $\mathbb{R}^n$ que contém todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ e todos os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ com medida exterior nula.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue da Observação 1.4.14, dos Lemas 1.4.15 e 1.4.16 e do Corolário 1.4.29. □

1.4.35. DEFINIÇÃO. Se X é um conjunto arbitrário e se $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ é uma coleção arbitrária de partes de X então a *σ-álgebra de partes de X gerada por $\mathcal{C}$*, denotada por $\sigma[\mathcal{C}]$, é a menor σ-álgebra de partes de X que contém $\mathcal{C}$, i.e., $\sigma[\mathcal{C}]$ é uma σ-álgebra de partes de X tal que:

(1) $\mathcal{C} \subset \sigma[\mathcal{C}]$;
(2) se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ então $\sigma[\mathcal{C}] \subset \mathcal{A}$.

Dizemos também que $\mathcal{C}$ é um *conjunto de geradores* para a σ-álgebra $\sigma[\mathcal{C}]$. A σ-álgebra de partes de $\mathbb{R}^n$ gerada pela coleção de todos os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ é chamada a *σ-álgebra de Borel* de $\mathbb{R}^n$ e é denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Os elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ são chamados *conjuntos Boreleanos* de $\mathbb{R}^n$.

No Exercício 1.22 pedimos ao leitor para justificar o fato de que a σ-álgebra gerada por uma coleção $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ está de fato bem definida, ou seja, existe uma única σ-álgebra $\sigma[\mathcal{C}]$ satisfazendo as propriedades (1) e (2) acima.

1.4.36. COROLÁRIO. *Todo conjunto Boreleano de $\mathbb{R}^n$ é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Teorema 1.4.34, os conjuntos mensuráveis formam uma σ-álgebra que contém os abertos de $\mathbb{R}^n$; portanto, deve conter também a σ-álgebra de Borel. $\square$

1.4.37. LEMA. *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de partes de um conjunto X e se $A, B \in \mathcal{A}$ então $A \cap B$ e $A \setminus B$ pertencem a $\mathcal{A}$. Além do mais, se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X e se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ então $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra e $A, B \in \mathcal{A}$ então $A^{\mathrm{c}}, B^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$ e portanto $A \cap B = (A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$; além do mais, $A \setminus B = A \cap B^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra e $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ então $A_k^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$ para todo $k \geq 1$ e portanto $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{\mathrm{c}}\big)^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$. $\square$

1.4.38. COROLÁRIO. *A interseção de uma coleção enumerável de subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ é mensurável e a diferença de dois subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Teorema 1.4.34 e do Lema 1.4.37. $\square$

1.4.39. LEMA. *Para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathfrak{m}^*(A) < +\infty$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto limitado $A_0 \subset A$ tal que:*

$$\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(A_0) \leq \mathfrak{m}^*(A \setminus A_0) < \varepsilon.$$

Além do mais, se A é mensurável, podemos escolher o conjunto A_0 também mensurável.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Lema 1.4.12 existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(U) \leq \mathfrak{m}^*(A) + 1 < +\infty$. O Lema 1.4.23 nos permite escrever $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, onde $(B_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos. O Corolário 1.4.21 nos dá:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| = \mathfrak{m}^*(U) < +\infty;$$

portanto a série $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$ é convergente e existe $t \geq 1$ tal que:

$$\sum_{k=t+1}^{\infty} |B_k| < \varepsilon.$$

Seja $A_0 = A \cap \big(\bigcup_{k=1}^{t} B_k\big)$. Temos que $A_0 \subset A$ e A_0 é limitado. Note que se A é mensurável então A_0 também é mensurável. Como $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ segue que $A \setminus A_0 \subset \bigcup_{k=t+1}^{\infty} B_k$ e portanto:

$$\mathfrak{m}^*(A \setminus A_0) \le \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=t+1}^{\infty} B_k\Big) \le \sum_{k=t+1}^{\infty} |B_k| < \varepsilon.$$

A desigualdade $\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(A_0) \le \mathfrak{m}^*(A \setminus A_0)$ segue do Corolário 1.4.9. □

1.4.40. COROLÁRIO. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável e $\mathfrak{m}^*(A) < +\infty$ então para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ contido em A tal que:*

$$\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(K) \le \mathfrak{m}^*(A \setminus K) < \varepsilon.$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Lema 1.4.39, existe um subconjunto limitado mensurável $A_0 \subset A$ tal que $\mathfrak{m}^*(A \setminus A_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ e pelo Corolário 1.4.30 existe um subconjunto fechado $K \subset \mathbb{R}^n$ contido em A_0 tal que $\mathfrak{m}^*(A_0 \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Obviamente $K \subset A$ e K é compacto. Como $A \setminus K = (A \setminus A_0) \cup (A_0 \setminus K)$, obtemos:

$$\mathfrak{m}^*(A \setminus K) \le \mathfrak{m}^*(A \setminus A_0) + \mathfrak{m}^*(A_0 \setminus K) < \varepsilon.$$

A desigualdade $\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(K) \le \mathfrak{m}^*(A \setminus K)$ segue do Corolário 1.4.9. □

1.4.41. PROPOSIÇÃO. *Se $A_1, \ldots, A_t$ são subconjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos de $\mathbb{R}^n$ então:*

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{t} A_r\Big) = \sum_{r=1}^{t} \mathfrak{m}^*(A_r). \tag{1.4.8}$$

Além do mais, se $(A_r)_{r\ge1}$ é uma seqüência de subconjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos de $\mathbb{R}^n$ então:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{\infty} A_r\Big) = \sum_{r=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_r). \tag{1.4.9}$$

DEMONSTRAÇÃO. Comecemos provando (1.4.8). Se $\mathfrak{m}^*(A_r) = +\infty$ para algum $r = 1, \ldots, t$ então também $\mathfrak{m}^*\big(\bigcup_{r=1}^{t} A_r\big) = +\infty$ e portanto não há nada a mostrar. Se $\mathfrak{m}^*(A_r) < +\infty$ para todo $r = 1, \ldots, t$ então para todo $\varepsilon > 0$ o Corolário 1.4.40 nos dá um subconjunto compacto K_r de A_r tal que $\mathfrak{m}^*(A_r) - \mathfrak{m}^*(K_r) < \frac{\varepsilon}{t}$. Usando o Corolário 1.4.19 obtemos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{t} A_r\Big) \ge \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{t} K_r\Big) = \sum_{r=1}^{t} \mathfrak{m}^*(K_r) > \sum_{r=1}^{t} \big(\mathfrak{m}^*(A_r) - \tfrac{\varepsilon}{t}\big) \\ = \Big(\sum_{r=1}^{t} \mathfrak{m}^*(A_r)\Big) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{t} A_r\Big) \geq \sum_{r=1}^{t} \mathfrak{m}^*(A_r).$$

O Lema 1.4.5 nos dá a desigualdade oposta, provando (1.4.8). Passemos então à prova de (1.4.9). A identidade (1.4.8) nos dá:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{\infty} A_r\Big) \geq \mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{t} A_r\Big) = \sum_{r=1}^{t} \mathfrak{m}^*(A_r),$$

para todo $t \geq 1$. Fazendo $t \to \infty$ concluímos que:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{r=1}^{\infty} A_r\Big) \geq \sum_{r=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_r).$$

Novamente a desigualdade oposta segue do Lema 1.4.5, o que prova (1.4.9). □

1.4.42. Definição. Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de X. O par $(X, \mathcal{A})$ é chamado um *espaço mensurável*; uma *medida* no espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ é uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e tal que, se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}$ então:

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{1.4.10}$$

Os elementos da σ-álgebra $\mathcal{A}$ são ditos *subconjuntos mensuráveis* de X. A trinca $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é chamada um *espaço de medida* .

Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida e se $A_1, \ldots, A_t$ é uma coleção finita de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}$ então $\mu\big(\bigcup_{k=1}^{t} A_k\big) = \sum_{k=1}^{t} \mu(A_k)$. De fato, basta tomar $A_k = \emptyset$ para $k > t$ e usar (1.4.10).

1.4.43. Notação. Denotaremos por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ a σ-álgebra de todos os subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ e por $\mathfrak{m} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ a restrição à $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ da função $\mathfrak{m}^* : \wp(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ que associa a cada parte de $\mathbb{R}^n$ sua medida exterior de Lebesgue.

1.4.44. Definição. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto mensurável então o escalar $\mathfrak{m}(A) \in [0, +\infty]$ é chamado a *medida de Lebesgue* de A.

Note que $\mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}^*(A)$ para todo $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, i.e., a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável simplesmente coincide com sua medida exterior de Lebesgue; apenas nos permitimos remover o adjetivo "exterior" quando lidamos com conjuntos mensuráveis.

Provamos o seguinte:

1.4.45. Teorema. *A trinca* $\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \mathfrak{m}\big)$ *é um espaço de medida.*

Demonstração. Segue do Teorema 1.4.34 e da Proposição 1.4.41. □

1.4.46. LEMA. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ com $A_1 \subset A_2$. Então $\mu(A_1) \le \mu(A_2)$; além do mais, se $\mu(A_1) < +\infty$ então:*

$$\mu(A_2 \setminus A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1).$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$ é uma união disjunta de elementos de $\mathcal{A}$ e portanto $\mu(A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1)$. □

1.4.47. NOTAÇÃO. Se $(A_k)_{k\ge1}$ é uma seqüência de conjuntos então a notação $A_k \nearrow A$ indica que $A_k \subset A_{k+1}$ para todo $k \ge 1$ (i.e., a seqüência $(A_k)_{k\ge1}$ é *crescente*) e que $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Analogamente, escreveremos $A_k \searrow A$ para indicar que $A_k \supset A_{k+1}$ para todo $k \ge 1$ (i.e., a seqüência $(A_k)_{k\ge1}$ é *decrescente*) e que $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

1.4.48. LEMA. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $(A_k)_{k\ge1}$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$. Temos:*

(a) *se $A_k \nearrow A$ então $\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$;*
(b) *se $A_k \searrow A$ e se $\mu(A_1) < +\infty$ então $\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Provemos inicialmente o item (a). Defina $A_0 = \emptyset$ e $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$, para todo $k \ge 1$; evidentemente $B_k \in \mathcal{A}$, para todo $k \ge 1$. É fácil ver que os conjuntos B_k são dois a dois disjuntos e que:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \quad A_r = \bigcup_{k=1}^{r} B_k,$$

para todo $r \ge 1$; logo:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^{r} \mu(B_k) = \lim_{r\to\infty} \mu(A_r).$$

Passemos à prova do item (b). Se $\mu(A_1) < +\infty$ então $\mu(A_k) < +\infty$ para todo $k \ge 1$. Como $(A_1 \setminus A_k)_{k\ge1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ e $(A_1 \setminus A_k) \nearrow (A_1 \setminus A)$, segue do item (a) que:

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1 \setminus A).$$

Usando o Lema 1.4.46 obtemos:

$$\lim_{k\to\infty} \big(\mu(A_1) - \mu(A_k)\big) = \mu(A_1) - \mu(A).$$

Como $\mu(A_1) < +\infty$, a conclusão segue. □

1.4.49. DEFINIÇÃO. Um *envelope mensurável* de um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto mensurável E de $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subset E$ e $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(E)$.

1.4.50. LEMA. *Para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ existe um subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ de tipo G_δ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(E)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $k \ge 1$ o Lema 1.4.12 nos dá um aberto U_k contendo A tal que $\mathfrak{m}(U_k) \le \mathfrak{m}^*(A) + \frac{1}{k}$. Daí $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ é um G_δ contendo A e:

$$\mathfrak{m}^*(A) \le \mathfrak{m}(E) \le \mathfrak{m}(U_k) \le \mathfrak{m}^*(A) + \frac{1}{k},$$

para todo $k \geq 1$. A conclusão segue. $\square$

1.4.51. Corolário. *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ admite um envelope mensurável.*

Demonstração. Basta observar que todo G_δ é mensurável (vide Corolário 1.4.38). $\square$

1.4.52. Lema. *Sejam $A_1, \ldots, A_t$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ e suponha que existam subconjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos $E_1, \ldots, E_t$ de $\mathbb{R}^n$ de modo que $A_k \subset E_k$, para $k = 1, \ldots, t$. Então:*

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^{t} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{t} \mathfrak{m}^*(A_k).$$

Além do mais, se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tal que existe uma seqüência $(E_k)_{k\geq 1}$ de subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ dois a dois disjuntos de modo que $A_k \subset E_k$ para todo $k \geq 1$ então:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_k).$$

Demonstração. Tomando $A_k = E_k = \emptyset$ para $k > t$, podemos considerar apenas o caso de uma seqüência infinita de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Seja E um envelope mensurável do conjunto $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Daí, para todo $k \geq 1$, o conjunto $E'_k = E \cap E_k$ é mensurável e $A_k \subset E'_k$. Como os conjuntos E'_k são dois a dois disjuntos e $\bigcup_{k=1}^{\infty} E'_k \subset E$, temos:

$$\mathfrak{m}^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mathfrak{m}(E) \geq \mathfrak{m}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E'_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(E'_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_k).$$

A desigualdade $\mathfrak{m}^*\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}^*(A_k)$ segue do Lema 1.4.5. $\square$

1.4.53. Proposição (Carathéodory). *Um subconjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável se e somente se para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ vale:*

$$\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*(A \cap E) + \mathfrak{m}^*(A \cap E^{\mathrm{c}}). \tag{1.4.11}$$

Demonstração. Se E é mensurável então $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^{\mathrm{c}})$, onde $A \cap E$ e $A \cap E^{\mathrm{c}}$ estão respectivamente contidos nos conjuntos mensuráveis disjuntos E e E^{c}. A identidade (1.4.11) segue portanto do Lema 1.4.52. Reciprocamente, suponha que a identidade (1.4.11) vale para todo $A \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $k \geq 1$ seja $E_k = E \cap [-k, k]^n$ e seja Z_k um envelope mensurável para E_k. A identidade (1.4.11) com $A = Z_k$ nos dá:

$$\mathfrak{m}^*(E_k) = \mathfrak{m}(Z_k) = \mathfrak{m}^*(Z_k \cap E) + \mathfrak{m}^*(Z_k \cap E^{\mathrm{c}}).$$

Como $Z_k \cap E \supset E_k$ vemos que:

$$\mathfrak{m}^*(E_k) \geq \mathfrak{m}^*(E_k) + \mathfrak{m}^*(Z_k \cap E^{\mathrm{c}}) \geq \mathfrak{m}^*(E_k);$$

como E_k é limitado, temos que $\mathfrak{m}^*(E_k) < +\infty$ (vide Observação 1.4.2) e portanto $\mathfrak{m}^*(Z_k \cap E^c) = 0$. Em particular, pelo Lema 1.4.16, $Z_k \cap E^c$ é mensurável. Tomando $Z = \bigcup_{k\geq 1} Z_k$ vemos que $E \subset Z$, Z é mensurável e:

$$Z \setminus E = Z \cap E^c = \bigcup_{k\geq 1} (Z_k \cap E^c).$$

Daí $Z\setminus E$ é mensurável e portanto $E = Z\setminus(Z\setminus E)$ também é mensurável. □

1.4.54. Observação. Na verdade, a demonstração apresentada para a Proposição 1.4.53 mostra algo mais forte: se a identidade (1.4.11) vale para todo conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$ então E é mensurável. Em vista do Lema 1.4.50, todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ admite um envelope mensurável de tipo G_δ e portanto a demonstração que apresentamos para a Proposição 1.4.53 mostra até mesmo o seguinte: se a identidade (1.4.11) vale para todo subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ de tipo G_δ então E é mensurável.

1.4.55. Lema. *Seja $(A_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de subconjuntos (não necessariamente mensuráveis) de $\mathbb{R}^n$ tal que $A_k \nearrow A$. Então:*

$$\mathfrak{m}^*(A) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}^*(A_k).$$

Demonstração. Temos que a seqüência $\big(\mathfrak{m}^*(A_k)\big)_{k\geq 1}$ é crescente e limitada superiormente por $\mathfrak{m}^*(A)$, donde o limite $\lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}^*(A_k)$ existe (em $[0, +\infty]$) e é menor ou igual a $\mathfrak{m}^*(A)$. Para provar que $\mathfrak{m}^*(A)$ é menor ou igual a $\lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}^*(A_k)$, escolha um envelope mensurável E_k para A_k e defina $F_k = \bigcap_{r\geq k} E_r$, para todo $k \geq 1$. Daí cada F_k é mensurável e $A_k \subset F_k \subset E_k$, donde também F_k é um envelope mensurável de A_k. Além do mais, temos $F_k \nearrow F$, onde F é um conjunto mensurável que contém A. A conclusão segue agora do Lema 1.4.48 observando que:

$$\mathfrak{m}^*(A) \leq \mathfrak{m}(F) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}(F_k) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}^*(A_k).$$ □

1.4.1. Medida interior. O conceito de medida interior é útil para entender melhor o fenômeno da não mensurabilidade de um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

1.4.56. Definição. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. A *medida interior de Lebesgue* de A é definida por:

$$\mathfrak{m}_*(A) = \sup\big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A,\ K \text{ compacto}\big\} \in [0, +\infty].$$

1.4.57. Lema. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável então $\mathfrak{m}_*(A) = \mathfrak{m}^*(A)$. Reciprocamente, dado $A \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathfrak{m}_*(A) = \mathfrak{m}^*(A) < +\infty$ então A é mensurável.*

Demonstração. Suponha que A é mensurável e mostremos que as medidas interior e exterior de A coincidem. Em primeiro lugar, se A tem medida exterior finita isso segue diretamente do Corolário 1.4.40. Suponha então que $\mathfrak{m}^*(A) = +\infty$. Pelo Corolário 1.4.30, existe um subconjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ contido em A tal que $\mathfrak{m}^*(A \setminus F) < 1$. Daí:

$$\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*\big(F \cup (A \setminus F)\big) \leq \mathfrak{m}^*(F) + \mathfrak{m}^*(A \setminus F) \leq \mathfrak{m}^*(F) + 1,$$

e portanto $\mathfrak{m}^*(F) = +\infty$. Para cada $r \geq 1$, seja $K_r = F \cap [-r, r]^n$. Daí cada K_r é compacto e $K_r \nearrow F$; o Lema 1.4.48 nos dá:

$$\lim_{r\to\infty} \mathfrak{m}(K_r) = \mathfrak{m}(F) = +\infty.$$

Logo $\mathfrak{m}_*(A) \geq \sup_{r\geq 1} \mathfrak{m}(K_r) = +\infty = \mathfrak{m}^*(A)$. Suponha agora que as medidas interior e exterior de A são iguais e finitas e mostremos que A é mensurável. Seja dado $\varepsilon > 0$. Temos que existe um subconjunto compacto $K \subset A$ tal que:

$$\mathfrak{m}(K) \geq \mathfrak{m}_*(A) - \frac{\varepsilon}{2} = \mathfrak{m}^*(A) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pelo Lema 1.4.12, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo A tal que:

$$\mathfrak{m}(U) \leq \mathfrak{m}^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}^*(U \setminus A) \leq \mathfrak{m}(U \setminus K) &= \mathfrak{m}(U) - \mathfrak{m}(K) \\ &= \big(\mathfrak{m}(U) - \mathfrak{m}^*(A)\big) + \big(\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}(K)\big) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

A conclusão segue. □

1.4.58. Corolário. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável então:*

$$\mathfrak{m}(A) = \sup\big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A,\ K \text{ compacto}\big\}. \qquad \square$$

1.4.59. Corolário. *Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ e E um subconjunto mensurável de A então $\mathfrak{m}(E) \leq \mathfrak{m}_*(A)$.*

Demonstração. O Lema 1.4.57 nos dá $\mathfrak{m}(E) = \mathfrak{m}_*(E)$. Como $E \subset A$, segue do resultado do Exercício 1.29 que $\mathfrak{m}_*(E) \leq \mathfrak{m}_*(A)$. □

1.4.60. Lema. *Dados $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ então vale a desigualdade:*

$$\mathfrak{m}_*(A_1 \cup A_2) \leq \mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}_*(A_2);$$

se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ então vale também a desigualdade:

$$\mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}_*(A_2) \leq \mathfrak{m}^*(A_1 \cup A_2).$$

Demonstração. Pelo resultado do Exercício 1.31, existe $W \subset \mathbb{R}^n$ de tipo F_σ tal que $W \subset A_1 \cup A_2$ e $\mathfrak{m}(W) = \mathfrak{m}_*(A_1 \cup A_2)$. Seja Z um envelope mensurável de A_1. Temos $W \subset (W \setminus Z) \cup Z$ e portanto:

$$\mathfrak{m}_*(A_1 \cup A_2) = \mathfrak{m}(W) \leq \mathfrak{m}(Z) + \mathfrak{m}(W \setminus Z) \leq \mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}_*(A_2),$$

onde usamos o Corolário 1.4.59 e o fato que $W \setminus Z$ é um subconjunto mensurável de A_2. Suponha agora que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Seja E um envelope mensurável de $A_1 \cup A_2$ e seja $F \subset \mathbb{R}^n$ de tipo F_σ tal que $F \subset A_2$ e $\mathfrak{m}(F) = \mathfrak{m}_*(A_2)$ (Exercício 1.31). Como $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, temos $A_1 \subset E \setminus F$ e portanto:

$$\mathfrak{m}^*(A_1 \cup A_2) = \mathfrak{m}(E) = \mathfrak{m}(E \setminus F) + \mathfrak{m}(F) \geq \mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}_*(A_2). \qquad \square$$

1.4.61. COROLÁRIO. *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto mensurável e sejam A_1, A_2 tais que $E = A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Então:*

$$\mathfrak{m}(E) = \mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}_*(A_2).$$

DEMONSTRAÇÃO. O Lema 1.4.60 nos dá:

$$\mathfrak{m}(E) \le \mathfrak{m}^*(A_1) + \mathfrak{m}_*(A_2) \le \mathfrak{m}(E). \qquad \square$$

1.5. Conjuntos de Cantor

Seja $I = [a, b]$, $a < b$, um intervalo fechado e limitado de comprimento positivo. Dado um escalar $\alpha > 0$, $\alpha < b - a = |I|$, consideramos o intervalo aberto J de comprimento α que possui o mesmo centro que I; denotamos então por $\lambda(I, \alpha; 0)$ e $\lambda(I, \alpha; 1)$ os dois intervalos remanescentes após remover J de I. Mais precisamente, sejam $c = \frac{1}{2}(a + b - \alpha)$ e $d = \frac{1}{2}(a + b + \alpha)$, de modo que $J =]c, d[$; definimos:

$$\lambda(I, \alpha; 0) = [a, c], \quad \lambda(I, \alpha; 1) = [d, b]. \tag{1.5.1}$$

Note que $a < c < d < b$, de modo que $\lambda(I, \alpha; 0)$ e $\lambda(I, \alpha; 1)$ são dois intervalos fechados e limitados disjuntos de comprimento positivo contidos em I; mais especificamente:

$$\big|\lambda(I, \alpha; 0)\big| = \big|\lambda(I, \alpha; 1)\big| = \frac{1}{2}\,(|I| - \alpha).$$

Dados um intervalo fechado e limitado I de comprimento positivo, um inteiro $n \ge 1$, escalares positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ com $\sum_{i=1}^n \alpha_i < |I|$ e $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{0, 1\}$, vamos definir um intervalo limitado e fechado $\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^n; (\epsilon_i)_{i=1}^n\big)$ tal que:

$$\Big|\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^n; (\epsilon_i)_{i=1}^n\big)\Big| = \frac{1}{2^n}\Big(|I| - \sum_{i=1}^n \alpha_i\Big) > 0. \tag{1.5.2}$$

A definição será feita recursivamente. Para $n = 1$, a definição já foi dada em (1.5.1). Dados um intervalo fechado e limitado I de comprimento positivo, escalares positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ com $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i < |I|$ e $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n+1} \in \{0, 1\}$, definimos:

$$\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^{n+1}; (\epsilon_i)_{i=1}^{n+1}\big) = \lambda\Big(\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^n; (\epsilon_i)_{i=1}^n\big), \frac{\alpha_{n+1}}{2^n}; \epsilon_{n+1}\Big).$$

Assumindo (1.5.2), é fácil ver que $\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^{n+1}; (\epsilon_i)_{i=1}^{n+1}\big)$ está bem definido e que:

$$\Big|\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^{n+1}; (\epsilon_i)_{i=1}^{n+1}\big)\Big| = \frac{1}{2^{n+1}}\Big(|I| - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\Big) > 0.$$

Segue então por indução que temos uma família de intervalos fechados e limitados $\lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^n; (\epsilon_i)_{i=1}^n\big)$ satisfazendo (1.5.2).

Fixemos então um intervalo fechado e limitado I de comprimento positivo e uma seqüência $(\alpha_i)_{i\ge 1}$ de escalares positivos tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \le |I|$.

Note que $\sum_{i=1}^n \alpha_i < |I|$, para todo $n \geq 1$. Para simplificar a notação, escrevemos:

$$I(\epsilon) = I(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = \lambda\big(I, (\alpha_i)_{i=1}^n; (\epsilon_i)_{i=1}^n\big),$$

para todo $n \geq 1$ e todo $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n$. Dada uma seqüência $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ em $\{0,1\}$ obtemos uma seqüência decrescente de intervalos fechados e limitados:

$$I \supset I(\epsilon_1) \supset I(\epsilon_1, \epsilon_2) \supset \cdots \supset I(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \supset \cdots \tag{1.5.3}$$

Afirmamos que, para todo $n \geq 1$, os intervalos $I(\epsilon)$, $\epsilon \in \{0,1\}^n$, são dois a dois disjuntos. De fato, sejam dados $\epsilon, \epsilon' \in \{0,1\}^n$, com $\epsilon \neq \epsilon'$. Seja $k \in \{1, \ldots, n\}$ o menor índice tal que $\epsilon_k \neq \epsilon'_k$. Temos $I(\epsilon) \subset I(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)$, $I(\epsilon') \subset I(\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_k)$, $J = I(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{k-1}) = I(\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_{k-1})$ e:

$$I(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k) = \lambda\Big(J, \frac{\alpha_k}{2^{k-1}}; \epsilon_k\Big), \quad I(\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_k) = \lambda\Big(J, \frac{\alpha_k}{2^{k-1}}; \epsilon'_k\Big).$$

Como $\epsilon_k \neq \epsilon'_k$, os intervalos $\lambda\big(J, \frac{\alpha_k}{2^{k-1}}; \epsilon_k\big)$ e $\lambda\big(J, \frac{\alpha_k}{2^{k-1}}; \epsilon'_k\big)$ são disjuntos e portanto também $I(\epsilon) \cap I(\epsilon') = \emptyset$. Para cada $n \geq 1$ definimos:

$$K_n = \bigcup_{\epsilon \in \{0,1\}^n} I(\epsilon).$$

Note que cada K_n é uma união disjunta de 2^n intervalos fechados e limitados de comprimento $\frac{1}{2^n}\big(|I| - \sum_{i=1}^n \alpha_i\big)$. Em particular, cada K_n é compacto e sua medida de Lebesgue é dada por:

$$\mathfrak{m}(K_n) = |I| - \sum_{i=1}^n \alpha_i. \tag{1.5.4}$$

1.5.1. Definição. O conjunto $K = \bigcap_{n=1}^\infty K_n$ é chamado o *conjunto de Cantor* determinado pelo intervalo fechado e limitado I e pela seqüência $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ de escalares positivos com $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i \leq |I|$.

Para cada seqüência $(\epsilon_i)_{i\geq 1}$ em $\{0,1\}$ temos que (1.5.3) é uma seqüência decrescente de intervalos fechados e limitados cujos comprimentos tendem a zero; de fato:

$$\big|I(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)\big| = \frac{1}{2^n}\Big(|I| - \sum_{i=1}^n \alpha_i\Big) \leq \frac{1}{2^n}\,|I| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{1.5.5}$$

Pelo princípio dos intervalos encaixantes, existe exatamente um ponto pertencente à interseção de todos os intervalos em (1.5.3). Definimos então uma aplicação:

$$\phi : \{0,1\}^\infty = \prod_{i=1}^\infty \{0,1\} \ni \epsilon = (\epsilon_i)_{i\geq 1} \longmapsto \phi(\epsilon) \in K,$$

de modo que:

$$\bigcap_{n=1}^\infty I(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) = \big\{\phi(\epsilon)\big\}, \tag{1.5.6}$$

para todo $\epsilon = (\epsilon_i)_{i\geq 1} \in \{0,1\}^\infty$.

As principais propriedades do conjunto K podem ser sumarizadas no seguinte:

1.5.2. Teorema. *Seja I um intervalo fechado e limitado de comprimento positivo e seja $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ uma seqüência de escalares positivos tal que:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \leq |I|.$$

Seja K o conjunto de Cantor determinado por I e por $(\alpha_i)_{i\geq 1}$. Então:

(a) *K é um subconjunto compacto de I;*
(b) *a medida de Lebesgue de K é $\mathfrak{m}(K) = |I| - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$;*
(c) *K tem interior vazio;*
(d) *K tem a mesma cardinalidade que a reta $\mathbb{R}$ (e é portanto não enumerável);*
(e) *K não tem pontos isolados.*

Demonstração.

- *Prova de* (a).
  Basta observar que K é uma interseção de subconjuntos compactos de I.

- *Prova de* (b).
  Segue de (1.5.4) e do Lema 1.4.48, observando que $K_n \searrow K$.

- *Prova de* (c).
  Um intervalo contido em K_n deve estar contido em algum dos intervalos $I(\epsilon)$, $\epsilon \in \{0,1\}^n$, e portanto deve ter comprimento menor ou igual a $\frac{1}{2^n}\big(|I| - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\big)$. Segue de (1.5.5) que nenhum intervalo de comprimento positivo pode estar contido em K_n para todo $n \geq 1$. Logo $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ não pode conter um intervalo aberto não vazio.

- *Prova de* (d).
  É fácil ver que a função ϕ definida em (1.5.6) é bijetora. A conclusão segue do fato bem conhecido que $\{0,1\}^\infty$ tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$.

- *Prova de* (e).
  Seja $x \in K$. Como ϕ é bijetora, existe $\epsilon \in \{0,1\}^\infty$ tal que $x = \phi(\epsilon)$. Escolhendo $\epsilon' \in \{0,1\}^\infty$ com $\epsilon' \neq \epsilon$ e $(\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_n) = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ então $\phi(\epsilon')$ é um ponto de K distinto de x. Além do mais, $\phi(\epsilon')$ e x ambos pertencem ao intervalo $I(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ e portanto:

$$\big|x - \phi(\epsilon')\big| \leq \big|I(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)\big| = \frac{1}{2^n}\Big(|I| - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\Big) \leq \frac{1}{2^n}\,|I|.$$

Concluímos que toda vizinhança de x contém um ponto de K distinto de x, i.e., x é um ponto de acumulação de K. $\square$

1.5.3. Exemplo. Escolhendo os escalares α_i com $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = |I|$ então o conjunto de Cantor K correspondente nos fornece um exemplo de um subconjunto não enumerável de $\mathbb{R}$ (com a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$) e com medida de Lebesgue zero.

1.5.4. Exemplo. Escolhendo os escalares α_i com $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < |I|$ então o conjunto de Cantor K correspondente nos fornece um exemplo de um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ com interior vazio e medida de Lebesgue positiva. Na verdade, para todo $\varepsilon > 0$ podemos escolher os escalares α_i com $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \varepsilon$ e daí o conjunto de Cantor K correspondente nos fornece um exemplo de um subconjunto compacto do intervalo I com interior vazio e $\mathfrak{m}(K) > |I| - \varepsilon$.

1.6. Conjuntos não Mensuráveis

Uma forma de construir um exemplo de um subconjunto não mensurável de $\mathbb{R}^n$ é repetir os passos da demonstração da Proposição 1.2.3.

1.6.1. Exemplo. Considere a relação binária $\sim$ no bloco $[0,1]^n$ definida por:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n,$$

para todos $x, y \in [0,1]^n$. É fácil ver que $\sim$ é uma relação de equivalência em $[0,1]^n$. Seja A um conjunto escolha para $\sim$. Como na demonstração da Proposição 1.2.3, vemos que os conjuntos $(A+q)_{q\in\mathbb{Q}^n}$ são dois a dois disjuntos e que:

$$[0,1]^n \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[-1,1]^n} (A+q) \subset [-1,2]^n.$$

Usando o Lema 1.4.10 e o resultado do Exercício 1.10, vemos que a mensurabilidade de A implicaria em:

$$0 < 1 = \mathfrak{m}\big([0,1]^n\big) \le \sum_{q\in\mathbb{Q}^n\cap[-1,1]^n} \mathfrak{m}(A) \le \mathfrak{m}\big([-1,2]^n\big) = 3^n < +\infty,$$

já que $\mathbb{Q}^n \cap [-1,1]^n$ é enumerável. Obtemos então uma contradição, o que mostra que A é um subconjunto não mensurável do bloco $[0,1]^n$.

No que segue, investigaremos mais a fundo o fenômeno da não mensurabilidade, produzindo alguns exemplos mais radicais de conjuntos não mensuráveis. Começamos com alguns lemas.

1.6.2. Lema. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\| < \delta$, temos:*

$$\mathfrak{m}\big(U \cup (U+x)\big) \le \mathfrak{m}(U) + \varepsilon. \tag{1.6.1}$$

DEMONSTRAÇÃO. A desigualdade (1.6.1) é trivial para $\mathfrak{m}(U) = +\infty$, de modo que podemos supor que $\mathfrak{m}(U) < +\infty$. Para cada $k \geq 1$, consideramos o conjunto U_k definido por:

$$U_k = \big\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, U^c) > \tfrac{1}{k}\big\}.$$

Como U é aberto, temos que $d(x, U^c) > 0$ se e somente se $x \in U$; isso implica que $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ e portanto $U_k \nearrow U$. A continuidade da função $x \mapsto d(x, U^c)$ implica que cada U_k é aberto e portanto mensurável. Pelo Lema 1.4.48, temos $\mathfrak{m}(U) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}(U_k)$ e portanto existe $k \geq 1$ tal que:

$$\mathfrak{m}(U_k) \geq \mathfrak{m}(U) - \varepsilon.$$

Tome $\delta = \frac{1}{k}$ e seja $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\| < \delta$. Para todo $y \in U_k$, temos $d(y, y - x) = \|x\| < \frac{1}{k}$ e portanto $y - x \in U$, i.e., $y \in U + x$. Segue então que $U_k \subset U \cap (U + x)$ e portanto:

$$\mathfrak{m}\big(U \cap (U + x)\big) \geq \mathfrak{m}(U) - \varepsilon.$$

A conclusão é obtida agora do cálculo abaixo:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}\big(U \cup (U + x)\big) &= \mathfrak{m}(U) + \mathfrak{m}(U + x) - \mathfrak{m}\big(U \cap (U + x)\big) \\ &= 2\mathfrak{m}(U) - \mathfrak{m}\big(U \cap (U + x)\big) \leq \mathfrak{m}(U) + \varepsilon,\end{aligned}$$

onde usamos o Lema 1.4.10 e o resultado do Exercício 1.18. □

1.6.3. DEFINIÇÃO. Se A é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, então o *conjunto das diferenças* de A é definido por:

$$A^- = \big\{x - y : x, y \in A\big\}.$$

1.6.4. LEMA. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável com medida de Lebesgue positiva então A^- contém uma vizinhança da origem.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $\mathfrak{m}(A) = +\infty$ então A contém um conjunto mensurável A_0 tal que $0 < \mathfrak{m}(A_0) < +\infty$ (isso segue, por exemplo, do Corolário 1.4.58). Como $A_0^- \subset A^-$, podemos considerar apenas o caso em que $\mathfrak{m}(A) < +\infty$. Pelo Lema 1.4.12, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}(U) < 2\mathfrak{m}(A)$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\mathfrak{m}(U) + \varepsilon < 2\mathfrak{m}(A)$. Pelo Lema 1.6.2, existe $\delta > 0$ tal que $\mathfrak{m}\big(U \cup (U + x)\big) \leq \mathfrak{m}(U) + \varepsilon$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\| < \delta$. Afirmamos que A^- contém a bola aberta de centro na origem e raio δ. Senão, existiria $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\| < \delta$ e $x \notin A^-$; daí A e $A + x$ seriam conjuntos mensuráveis disjuntos (veja Exercício 1.10) e portanto, usando o Lema 1.4.10, concluiríamos que:

$$\begin{aligned}2\mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(A) + \mathfrak{m}(A + x) = \mathfrak{m}\big(A \cup (A + x)\big) &\leq \mathfrak{m}\big(U \cup (U + x)\big) \\ &\leq \mathfrak{m}(U) + \varepsilon < 2\mathfrak{m}(A),\end{aligned}$$

e obteríamos portanto uma contradição. □

1.6.5. COROLÁRIO. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se A^- não contém uma vizinhança da origem então $\mathfrak{m}_*(A) = 0$.*

Demonstração. Dado um compacto $K \subset A$ então K é mensurável e K^- não contém uma vizinhança da origem. Segue então do Lema 1.6.4 que $\mathfrak{m}(K) = 0$. $\square$

Para construir exemplos de conjuntos não mensuráveis, vamos aplicar algumas técnicas da teoria de colorimento de grafos.

1.6.6. Definição. Um *grafo* é um par ordenado $G = (V, \mathcal{E})$, onde V é um conjunto arbitrário e $\mathcal{E}$ é uma relação binária anti-reflexiva e simétrica em V; mais precisamente, $\mathcal{E}$ é um subconjunto de $V \times V$ tal que:

- $(x, x) \notin \mathcal{E}$, para todo $x \in V$;
- $(x, y) \in \mathcal{E}$ implica $(y, x) \in \mathcal{E}$, para todos $x, y \in V$.

Os elementos de V são chamados os *vértices* do grafo G. Dados vértices $x, y \in V$ com $(x, y) \in \mathcal{E}$ então dizemos que x e y são *vértices adjacentes* no grafo G.

Se V' é um subconjunto de V então $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cap (V' \times V')$ é um relação binária anti-reflexiva e simétrica em V', de modo que $G' = (V', \mathcal{E}')$ é um grafo. Dizemos que $G' = (V', \mathcal{E}')$ é o *subgrafo cheio* de G determinado pelo conjunto de vértices V'.

1.6.7. Definição. Seja $G = (V, \mathcal{E})$ um grafo. Um *colorimento* para G é uma função f definida em V tal que $f(x) \neq f(y)$, para todo $(x, y) \in \mathcal{E}$. Para cada $x \in V$, dizemos que $f(x)$ é a *cor* do vértice x. Se k é um inteiro positivo então um *k-colorimento* de G é um colorimento $f : V \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ de G. Quando G admite um k-colorimento dizemos que G é *k-colorível*.

1.6.8. Definição. Seja $G = (V, \mathcal{E})$ um grafo. Um *caminho* em G é uma seqüência finita $(x_i)_{i=0}^p$, $p \geq 0$, de vértices de G tal que $(x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{E}$ para todo $i = 0, \ldots, p-1$; dizemos também que $(x_i)_{i=0}^p$ é um caminho *começando* em x_0 e *terminando* em x_p. O caminho $(x_i)_{i=0}^p$ é dito *de comprimento* p. Por convenção, uma seqüência unitária formada por um único vértice $x_0 \in V$ é um caminho de comprimento zero começando em x_0 e terminando em x_0. Quando existe um caminho em G começando em x e terminando em y para todos $x, y \in V$, dizemos que G é um *grafo conexo*. Um *circuito* em G é um caminho $(x_i)_{i=0}^p$ em G tal que $x_0 = x_p$.

É fácil ver que a relação binária $\sim$ em V definida por:

$$x \sim y \iff \text{existe um caminho em } G \text{ começando em } x \text{ e terminando em } y,$$

é uma relação de equivalência em V. Seja $V_0 \subset V$ uma classe de equivalência determinada por $\sim$. Verifica-se facilmente que o subgrafo cheio G_0 de G determinado por V_0 é conexo; dizemos que G_0 é uma *componente conexa* do grafo G.

1.6.9. Lema. *Um grafo $G = (V, \mathcal{E})$ é 2-colorível se e somente se não possui circuitos de comprimento ímpar.*

Demonstração. Assuma que o grafo G é 2-colorível, i.e., existe um 2-colorimento $f : V \to \{0,1\}$ de G. Seja $(x_i)_{i=0}^p$ um circuito de G. Mostremos que p é par. Para fixar as idéias, assuma que $f(x_0) = 0$. Como os vértices x_0 e x_1 são adjacentes, temos $f(x_1) \neq f(x_0)$ e portanto $f(x_1) = 1$. Similarmente, vemos que $f(x_2) = 0$ e, mais geralmente, $f(x_i) = 0$ para i par e $f(x_i) = 1$ para i ímpar. Como $f(x_p) = f(x_0) = 0$, concluímos que p deve ser par. Reciprocamente, assuma agora que o grafo G não possui circuito de comprimento ímpar e mostremos que G é 2-colorível. É fácil ver que:

- nenhuma componente conexa de G possui um circuito de comprimento ímpar;
- se cada componente conexa de G é 2-colorível então G é 2-colorível.

Podemos então supor que G é conexo. Dados vértices $x, y \in V$ de G então os comprimentos de dois caminhos em G começando em x e terminando em y têm a mesma paridade. De fato, se $(x_i)_{i=0}^p$ e $(x'_i)_{i=0}^q$ são caminhos em G começando em x e terminando em y então:

$$x = x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_p = y = x'_q,\ x'_{q-1},\ \ldots,\ x'_0 = x,$$

é um circuito em G de comprimento $p + q$. Logo $p + q$ é par e portanto p e q possuem a mesma paridade. Fixamos agora um vértice $x_0 \in V$ e definimos $f : V \to \{0,1\}$ fazendo $f(x) = 0$ se todo caminho começando em x_0 e terminando em x tem comprimento par e $f(x) = 1$ se todo caminho começando em x_0 e terminando em x tem comprimento ímpar. É fácil ver que f é um 2-colorimento para G. $\square$

1.6.10. Definição. Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que não contém a origem. O *grafo de Cayley* associado ao par $(\mathbb{R}^n, S)$, denotado por $G(\mathbb{R}^n, S)$, é o grafo $(V, \mathcal{E})$ tal que $V = \mathbb{R}^n$ e:

$$\mathcal{E} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x - y \in S \text{ ou } y - x \in S\big\}.$$

1.6.11. Lema. *Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que não contém a origem. O grafo de Cayley $G(\mathbb{R}^n, S)$ é 2-colorível se e somente se S possui a seguinte propriedade:*

(∗) *dados $s_1, \ldots, s_k \in S$ e $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ com $\sum_{i=1}^k n_i s_i = 0$ então $\sum_{i=1}^k n_i$ é par.*

Demonstração. Em vista do Lema 1.6.9, basta mostrar que $G(\mathbb{R}^n, S)$ não possui circuito de comprimento ímpar se e somente se S possui a propriedade (∗). Assuma que S possui a propriedade (∗) e que $(x_i)_{i=0}^p$ é um circuito de $G(\mathbb{R}^n, S)$. Mostremos que p é par. Para cada $i = 0, \ldots, p-1$ temos que $x_{i+1} - x_i \in S$ ou $x_i - x_{i+1} \in S$; podemos então escrever $x_{i+1} - x_i = n_i s_i$, com $n_i \in \{\pm 1\}$ e $s_i \in S$. Daí:

$$\sum_{i=0}^{p-1} n_i s_i = \sum_{i=0}^{p-1} (x_{i+1} - x_i) = x_p - x_0 = 0$$

e logo $\sum_{i=0}^{p-1} n_i$ é par. Mas $\sum_{i=0}^{p-1} |n_i|$ tem a mesma paridade que $\sum_{i=0}^{p-1} n_i$ e portanto $\sum_{i=0}^{p-1} |n_i| = p$ é par. Reciprocamente, suponha que $G(\mathbb{R}^n, S)$ não possui circuito de comprimento ímpar e mostremos que S possui a propriedade $(*)$. Sejam $s_1, \ldots, s_k \in S$ e $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ com $\sum_{i=1}^{k} n_i s_i = 0$. Escreva $s_i' = s_i$ se $n_i \ge 0$ e $s_i' = -s_i$ se $n_i < 0$, de modo que $n_i s_i = |n_i| s_i'$ e $s_i' \in S$ ou $-s_i' \in S$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Temos que $\sum_{i=1}^{k} |n_i| s_i' = 0$, ou seja:

$$\underbrace{s_1' + s_1' + \cdots + s_1'}_{|n_1| \text{ termos}} + \underbrace{s_2' + s_2' + \cdots + s_2'}_{|n_2| \text{ termos}} + \cdots + \underbrace{s_k' + s_k' + \cdots + s_k'}_{|n_k| \text{ termos}} = 0. \tag{1.6.2}$$

Sejam $p = \sum_{i=1}^{k} |n_i|$, $x_0 = 0$ e, para $j = 1, 2, \ldots, p$, seja x_j a soma dos primeiros j termos da soma que aparece do lado esquerdo da identidade (1.6.2). Temos que $(x_j)_{j=0}^{p}$ é um circuito em $G(\mathbb{R}^n, S)$ de comprimento p e portanto p é par. Finalmente, como $\sum_{i=1}^{k} |n_i|$ e $\sum_{i=1}^{k} n_i$ têm a mesma paridade, segue que $\sum_{i=1}^{k} n_i$ é par. □

1.6.12. Lema. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e suponha que exista um 2-colorimento $f : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$ do grafo de Cayley $G(\mathbb{R}^n, S)$. Se a origem é um ponto de acumulação de S então os conjuntos $A = f^{-1}(0)$ e $B = f^{-1}(1)$ possuem medida interior nula.*

Demonstração. Dados $x, y \in A$ então $f(x) = f(y) = 0$ e portanto os vértices x e y não podem ser adjacentes no grafo $G(\mathbb{R}^n, S)$. Em particular, $x - y \notin S$, o que mostra que o conjunto das diferenças A^- é disjunto de S. Como a origem é um ponto de acumulação de S, segue que A^- não pode conter uma vizinhança da origem e portanto, pelo Corolário 1.6.5, A tem medida interior nula. Analogamente, vemos que $B^- \cap S = \emptyset$ e portanto $\mathfrak{m}_*(B) = 0$. □

1.6.13. Exemplo. Em vista dos Lemas 1.6.11 e 1.6.12, se exibirmos um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ com a propriedade $(*)$ e que possui a origem como ponto de acumulação então obteremos uma partição $\mathbb{R}^n = A \cup B$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathfrak{m}_*(A) = \mathfrak{m}_*(B) = 0$. Por exemplo, é fácil mostrar que o conjunto:

$$S = \left\{ \tfrac{1}{m} : m \text{ inteiro ímpar} \right\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

tem a propriedade $(*)$ e obviamente a origem é ponto de acumulução de S. Em $\mathbb{R}^n$, podemos considerar o conjunto S^n (ou até mesmo $S \times \{0\}^{n-1}$), que também tem a propriedade $(*)$ e a origem como ponto de acumulação.

1.6.14. Exemplo. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos disjuntos de medida interior nula tais que $\mathbb{R}^n = A \cup B$ (vide Exemplo 1.6.13). Definindo:

$$A' = A \cap [0, 1]^n, \quad B' = B \cap [0, 1]^n,$$

obtemos uma partição $[0, 1]^n = A' \cup B'$ do bloco $[0, 1]^n$ em conjuntos A', B' de medida interior nula. Usando o Corolário 1.4.61 vemos que:

$$1 = \mathfrak{m}\big([0, 1]^n\big) = \mathfrak{m}^*(A') + \mathfrak{m}_*(B') = \mathfrak{m}^*(A')$$

e portanto $\mathfrak{m}^*(A') = 1$. Similarmente, vemos que $\mathfrak{m}^*(B') = 1$. Obtivemos então subconjuntos do bloco $[0,1]^n$ com medida interior nula e medida exterior igual a 1. Obtivemos também uma partição do bloco $[0,1]^n$ em dois conjuntos de medida exterior igual a 1; note que:

$$1 = \mathfrak{m}\big([0,1]^n\big) < \mathfrak{m}^*(A') + \mathfrak{m}^*(B') = 2,$$

com $[0,1]^n = A' \cup B'$ e A', B' disjuntos!

Exercícios para o Capítulo 1

Aritmética na Reta Estendida.

Exercício 1.1. Mostre que todo subconjunto da reta estendida possui supremo e ínfimo.

Exercício 1.2. Prove o Lema 1.1.7.

Exercício 1.3. Dadas famílias $(a_i)_{i\in I}$ e $(b_j)_{j\in J}$ em $\overline{\mathbb{R}}$ tais que a soma $a_i + b_j$ é bem definida para todos $i \in I$, $j \in J$, mostre que:

$$\sup\big\{a_i + b_j : i \in I,\ j \in J\big\} = \sup_{i\in I} a_i + \sup_{j\in J} b_j,$$

desde que a soma $\sup_{i\in I} a_i + \sup_{j\in J} b_j$ esteja bem definida. Mostre também que:

$$\inf\big\{a_i + b_j : i \in I,\ j \in J\big\} = \inf_{i\in I} a_i + \inf_{j\in J} b_j,$$

desde que a soma $\inf_{i\in I} a_i + \inf_{j\in J} b_j$ esteja bem definida.

Exercício 1.4. Prove o Lema 1.1.8.

Exercício 1.5. Sejam $(a_k)_{k\ge1}$ e $(b_k)_{k\ge1}$ seqüências crescentes no intervalo $[0,+\infty]$. Mostre que:

$$\lim_{k\to\infty} a_k b_k = \big(\lim_{k\to\infty} a_k\big)\big(\lim_{k\to\infty} b_k\big).$$

Exercício 1.6. Prove a Proposição 1.1.10.

Exercício 1.7. Prove a Proposição 1.1.12.

*Exercício 1.8.

- Mostre que os conjuntos:

$$\begin{aligned} &\left]a,b\right[, \quad a,b\in\overline{\mathbb{R}},\ a<b,\\ &\left[-\infty,a\right[, \quad a\in\overline{\mathbb{R}},\ a>-\infty,\\ &\left]a,+\infty\right], \quad a\in\overline{\mathbb{R}},\ a<+\infty, \end{aligned}$$

  constituem uma base de abertos para uma topologia em $\overline{\mathbb{R}}$.
- Mostre que a aplicação $f : [-1,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{se } x = -1,\\ \dfrac{x}{1-x^2}, & \text{se } x \in \left]-1,1\right[,\\ +\infty, & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

  é um homeomorfismo.

- Mostre que uma seqüência $(a_k)_{k\geq 1}$ em $\overline{\mathbb{R}}$ converge para um elemento $a \in \overline{\mathbb{R}}$ com respeito à topologia introduzida acima se e somente se $(a_k)_{k\geq 1}$ converge para a de acordo com a Definição 1.1.6.
- Mostre que a função $D_+ \ni (a,b) \mapsto a+b \in \overline{\mathbb{R}}$ é contínua, onde:
$$D_+ = (\,\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}\,) \setminus \big\{(-\infty,+\infty),(+\infty,-\infty)\big\}$$
é munido da topologia induzida pela topologia produto de $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$.
- Mostre que a função $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \ni (a,b) \mapsto ab \in \overline{\mathbb{R}}$ é contínua, *exceto* nos pontos $(+\infty,0)$, $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ e $(0,-\infty)$.

Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Exercício 1.9. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, mostre que:
$$\mathfrak{m}^*(A) = \inf\big\{\mathfrak{m}(U) : U \text{ aberto em } \mathbb{R}^n \text{ e } A \subset U\big\}.$$

Exercício 1.10. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável, mostre que $A + x$ também é mensurável para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 1.11. Seja σ uma *permutação de n elementos*, ou seja, uma bijeção do conjunto $\{1,\ldots,n\}$ sobre si próprio. Considere o isomorfismo linear $\widehat{\sigma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por:
$$\widehat{\sigma}(x_1,\ldots,x_n) = \big(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}\big),$$
para todo $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Mostre que:

(a) se B é um bloco retangular n-dimensional então $\widehat{\sigma}(B)$ é também um bloco retangular n-dimensional e $|\widehat{\sigma}(B)| = |B|$;
(b) para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, vale a igualdade $\mathfrak{m}^*\big(\widehat{\sigma}(A)\big) = \mathfrak{m}^*(A)$;
(c) se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável então $\widehat{\sigma}(A)$ também é mensurável.

Exercício 1.12. Dado um vetor $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ com todas as coordenadas não nulas, consideramos o isomorfismo linear $D_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por:
$$D_\lambda(x_1,\ldots,x_n) = (\lambda_1 x_1,\ldots,\lambda_n x_n),$$
para todo $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Mostre que:

(a) se B é um bloco retangular n-dimensional então $D_\lambda(B)$ é também um bloco retangular n-dimensional e:
$$|D_\lambda(B)| = |\lambda_1|\cdots|\lambda_n|\,|B| = |\det D_\lambda|\,|B|;$$
(b) para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, vale a igualdade $\mathfrak{m}^*\big(D_\lambda(A)\big) = |\det D_\lambda|\,\mathfrak{m}^*(A)$;
(c) se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável então $D_\lambda(A)$ também é mensurável.

Definição 1.1. Dados conjuntos A e B então a *diferença simétrica* de A e B é definida por:
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Exercício 1.13. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que $\mathfrak{m}^*(A \triangle B) = 0$. Mostre que:

- $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*(B)$;
- A é mensurável se e somente se B é mensurável.

Exercício 1.14. Dado um subconjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\mathfrak{m}(A) < +\infty$, mostre que, para todo $\varepsilon > 0$, existem blocos retangulares n-dimensionais $B_1, \ldots, B_t$ com interiores dois a dois disjuntos de modo que:

$$\mathfrak{m}\Big(\big(\textstyle\bigcup_{k=1}^t B_k\big) \triangle A\Big) < \varepsilon.$$

Exercício 1.15. Dados subconjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ com $\mathfrak{m}^*(A) < +\infty$ ou $\mathfrak{m}^*(B) < +\infty$, mostre que:

$$\big|\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(B)\big| \le \mathfrak{m}^*(A \triangle B).$$

Exercício 1.16. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um envelope mensurável de A. Se E' é um conjunto mensurável tal que $A \subset E' \subset E$, mostre que E' também é um envelope mensurável de A.

Exercício 1.17. Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) E é Lebesgue mensurável;
(b) existem Boreleanos $A, M \subset \mathbb{R}^n$ e um subconjunto N de M de modo que $E = A \cup N$ e $\mathfrak{m}(M) = 0$.

Exercício 1.18. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dados $A, B \in \mathcal{A}$ com $\mu(A \cap B) < +\infty$, mostre que:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Exercício 1.19. Seja $(A_k)_{k\ge1}$ uma seqüência de conjuntos. Defina:

$$B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} A_i,$$

para todo $k \ge 1$, onde $A_0 = \emptyset$. Mostre que os conjuntos $(B_k)_{k\ge1}$ são dois a dois disjuntos e que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Exercício 1.20. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $(A_k)_{k\ge1}$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$. Mostre que $\mu\big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\big) \le \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$.

Exercício 1.21. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $(A_k)_{k\ge1}$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $\mu(A_k \cap A_l) = 0$, para todos $k, l \ge 1$ com $k \ne l$. Mostre que $\mu\big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\big) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$.

Exercício 1.22. Seja X um conjunto arbitrário.

(a) Se $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ é uma família não vazia de σ-álgebras de partes de X, mostre que $\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ também é uma σ-álgebra de partes de X.
(b) Mostre que, fixada uma coleção $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ de partes de X, existe *no máximo uma* σ-álgebra $\sigma[\mathcal{C}]$ de partes de X satisfazendo as propriedades (1) e (2) que aparecem na Definição 1.4.35.

(c) Dada uma coleção arbitrária $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ de partes de X, mostre que a interseção de todas as σ-álgebras de partes de X que contém $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra de partes de X que satisfaz as propriedades (1) e (2) que aparecem na Definição 1.4.35 (note que sempre existe ao menos uma σ-álgebra de partes de X contendo $\mathcal{C}$, a saber, $\wp(X)$).

Exercício 1.23. Seja X um conjunto arbitrário e sejam $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \wp(X)$ coleções arbitrárias de partes de X. Se $\mathcal{C}_1 \subset \sigma[\mathcal{C}_2]$ e $\mathcal{C}_2 \subset \sigma[\mathcal{C}_1]$, mostre que $\sigma[\mathcal{C}_1] = \sigma[\mathcal{C}_2]$.

Exercício 1.24. Mostre que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de tipo G_δ ou de tipo F_σ é Boreleano.

Exercício 1.25. Mostre que:

(a) a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ coincide com a σ-álgebra gerada pelos intervalos da forma $]a, b]$, com $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$;
(b) a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ coincide com a σ-álgebra gerada pelos intervalos da forma $]-\infty, c]$, $c \in \mathbb{R}$.

Exercício 1.26. Se I é um intervalo fechado e limitado de comprimento positivo, mostre que o único subconjunto fechado $F \subset I$ com $\mathfrak{m}(F) = |I|$ é $F = I$. Conclua que não existe um subconjunto fechado com interior vazio $F \subset I$ tal que $\mathfrak{m}(F) = |I|$ (compare com o Exemplo 1.5.4).

*Exercício 1.27. Sejam dados conjuntos $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$, de modo que $A \times B \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$.

(a) Mostre que $\mathfrak{m}^*(A \times B) \le \mathfrak{m}^*(A)\mathfrak{m}^*(B)$.
(b) Mostre que se A e B são mensuráveis então $A \times B$ também é mensurável.
(c) Mostre que se A e B são mensuráveis então $\mathfrak{m}(A \times B) = \mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B)$.

Medida Interior.

Exercício 1.28. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, mostre que $\mathfrak{m}_*(A) \le \mathfrak{m}^*(A)$.

Exercício 1.29. Mostre que a medida interior de Lebesgue é monotônica, i.e., se $A_1 \subset A_2 \subset \mathbb{R}^n$ então $\mathfrak{m}_*(A_1) \le \mathfrak{m}_*(A_2)$.

Exercício 1.30. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, mostre que:

$$\mathfrak{m}_*(A) = \sup \big\{ \mathfrak{m}(E) : E \subset A,\ E \text{ mensurável} \big\}.$$

Mais geralmente, mostre que se $\mathcal{M}'$ é um subconjunto de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ que contém todos os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ então:

$$\mathfrak{m}_*(A) = \sup \big\{ \mathfrak{m}(E) : E \subset A,\ E \in \mathcal{M}' \big\}.$$

Exercício 1.31. Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, mostre que existe um subconjunto W de $\mathbb{R}^n$ de tipo F_σ tal que $W \subset A$ e $\mathfrak{m}(W) = \mathfrak{m}_*(A)$.

Exercício 1.32. Seja $(A_k)_{k \ge 1}$ uma seqüência de subconjuntos dois a dois disjuntos de $\mathbb{R}^n$. Mostre que:

$$\mathfrak{m}_*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Big) \ge \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_*(A_k).$$

EXERCÍCIO 1.33. Seja $(A_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tal que $A_k \searrow A$ e $\mathfrak{m}_*(A_k) < +\infty$ para algum $k \geq 1$. Mostre que:

$$\mathfrak{m}_*(A) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}_*(A_k).$$

Conjuntos de Cantor.

DEFINIÇÃO 1.2. Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é dito *magro* quando está contido numa reunião enumerável de subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ com interior vazio.

O famoso *Teorema de Baire* implica que todo subconjunto magro de $\mathbb{R}^n$ tem interior vazio.

EXERCÍCIO 1.34. Mostre que:

- existe um subconjunto magro e mensurável $A \subset [0,1]$ tal que $\mathfrak{m}(A) = 1$ (compare com o Exercício 1.26);
- se A é o conjunto do item anterior, mostre que $[0,1] \setminus A$ é um conjunto de medida de Lebesgue zero que não é magro.

EXERCÍCIO 1.35. Considere o intervalo $I = [0,1]$ e a seqüência $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ definida por:

$$\alpha_i = \frac{2^{i-1}}{3^i},$$

para todo $i \geq 1$. O conjunto de Cantor K associado a I e à seqüência $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ é conhecido como o *conjunto ternário de Cantor*. Mostre que:

- $\mathfrak{m}(K) = 0$;
- para todo $n \geq 1$ e todo $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n$ o intervalo $I(\epsilon)$ é dado por:

$$I(\epsilon) = \Big[\sum_{i=1}^{n} \frac{2\epsilon_i}{3^i}, \frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2\epsilon_i}{3^i}\Big];$$

- a bijeção $\phi : \{0,1\}^\infty \to K$ definida em (1.5.6) é dada por:

$$\phi(\epsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\epsilon_i}{3^i},$$

  para todo $\epsilon = (\epsilon_i)_{i\geq 1} \in \{0,1\}^\infty$.

EXERCÍCIO 1.36. Considere a relação de *ordem lexicográfica* no conjunto $\{0,1\}^\infty$, i.e., para $\epsilon = (\epsilon_i)_{i\geq 1}, \epsilon' = (\epsilon'_i)_{i\geq 1} \in \{0,1\}^\infty$ dizemos que $\epsilon < \epsilon'$ quando existe um índice $i \geq 1$ tal que $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}) = (\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_{i-1})$ e $\epsilon_i < \epsilon'_i$. Mostre que a função $\phi : \{0,1\}^\infty \to K$ definida em (1.5.6) é *estritamente crescente*, i.e., se $\epsilon < \epsilon'$ então $\phi(\epsilon) < \phi(\epsilon')$.

EXERCÍCIO 1.37. Utilizando a notação da Seção 1.5, mostre que para todo $n \geq 1$ e todo $\epsilon = (\epsilon_i)_{i=1}^n \in \{0,1\}^n$, a extremidade esquerda do intervalo $I(\epsilon)$ é $\phi(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, 0, 0, \ldots)$ e a extremidade direita de $I(\epsilon)$ é $\phi(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n, 1, 1, \ldots)$.

Conjuntos não Mensuráveis.

EXERCÍCIO 1.38. Mostre que existe um subconjunto não mensurável A de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathfrak{m}_*(A) = \mathfrak{m}^*(A) = +\infty$.

CAPÍTULO 2

Integrando Funções em Espaços de Medida

2.1. Funções Mensuráveis

Recorde da Definição 1.4.42 que um espaço mensurável é um conjunto X do qual destacamos uma certa coleção de subconjuntos $\mathcal{A} \subset \wp(X)$ (mais precisamente, uma σ-álgebra de partes de X) aos quais damos o nome de mensuráveis. A palavra "mensurável" nesse contexto não indica que os conjuntos possam ser medidos de alguma forma ou que estamos assumindo a existência de alguma medida não trivial definida em $\mathcal{A}$. Um mesmo conjunto X admite em geral diversas σ-álgebras; por exemplo, $\{\emptyset, X\}$ e $\wp(X)$ são sempre exemplos (triviais) de σ-álgebras de partes de X. Portanto, o termo "mensurável" só deve ser usado quando uma σ-álgebra específica estiver fixada pelo contexto. No conjunto $\mathbb{R}^n$, temos dois exemplos importantes de σ-álgebras; a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e a σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ de conjuntos Lebesgue mensuráveis. No que segue, precisaremos também introduzir uma σ-álgebra de Borel para a reta estendida $\overline{\mathbb{R}}$; temos a seguinte:

2.1.1. Definição. Um subconjunto $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ é dito *Boreleano* quando $A \cap \mathbb{R}$ for um Boreleano de $\mathbb{R}$.

É fácil ver que os subconjuntos Boreleanos de $\overline{\mathbb{R}}$ constituem de fato uma σ-álgebra de partes de $\overline{\mathbb{R}}$. Tal σ-álgebra será chamada a *σ-álgebra de Borel* de $\overline{\mathbb{R}}$ e será denotada por $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

A σ-álgebra $\mathcal{A}$ de um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ pode ser entendida como uma *estrutura* que colocamos no conjunto subjacente X (assim como, digamos, as operações de um espaço vetorial constituem uma estrutura no conjunto subjacente). Devemos então introduzir uma noção de *função que preserva a estrutura* de um espaço mensurável.

2.1.2. Definição. Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ espaços mensuráveis. Uma *função mensurável* $f : (X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ é uma função $f : X \to X'$ tal que para todo conjunto $E \in \mathcal{A}'$ temos que $f^{-1}(E)$ pertence a $\mathcal{A}$.

Em outras palavras, uma função é mensurável se a imagem inversa de conjuntos mensuráveis é mensurável. Quando as σ-álgebras em questão estiverem subentendidas pelo contexto, nos referiremos apenas à mensurabilidade da função $f : X \to X'$, omitindo a menção explícita a $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$.

O conjunto $\mathbb{R}^n$ aparecerá com muita freqüência como domínio ou contradomínio de nossas funções e introduzimos abaixo uma convenção que evita a necessidade de especificar a σ-álgebra considerada em $\mathbb{R}^n$ em cada situação.

2.1.3. CONVENÇÃO. A menos de menção explícita em contrário, o conjunto $\mathbb{R}^n$ será considerado munido da σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ sempre que o mesmo aparecer no *contra-domínio* de uma função; mais explicitamente, se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável então por uma *função mensurável* $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ entenderemos uma função $f : X \to \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, para todo Boreleano $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Similarmente, a reta estendida $\overline{\mathbb{R}}$ será considerada munida da σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, sempre que a mesma aparecer no contra-domínio de uma função. Por outro lado, o conjunto $\mathbb{R}^n$ será sempre considerado munido da σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ de conjuntos Lebesgue mensuráveis, quando o mesmo aparecer no *domínio* de uma função; mais explicitamente, uma *função mensurável* $f : \mathbb{R}^n \to (X, \mathcal{A})$ é uma função $f : \mathbb{R}^n \to X$ tal que $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, para todo $E \in \mathcal{A}$.

Por exemplo, em vista da convenção 2.1.3 acima, uma função mensurável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, para todo $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Nós dificilmente teremos qualquer interesse em considerar a σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{R}^n$ quando o mesmo aparece no contra-domínio de uma função; por outro lado, em algumas situações é interessante considerar a σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{R}^n$ quando o mesmo aparece no domínio de uma função (contrariando, portanto, a convenção 2.1.3). Introduzimos então a seguinte terminologia.

2.1.4. DEFINIÇÃO. Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma *função Borel mensurável* $f : \mathbb{R}^n \to (X, \mathcal{A})$ é uma função $f : \mathbb{R}^n \to X$ tal que $f : \big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big) \to (X, \mathcal{A})$ é uma função mensurável, i.e., tal que $f^{-1}(E)$ é um Boreleano de $\mathbb{R}^n$ para todo $E \in \mathcal{A}$. Similarmente, uma *função Borel mensurável* $f : \overline{\mathbb{R}} \to (X, \mathcal{A})$ é uma função $f : \overline{\mathbb{R}} \to X$ tal que $f : \big(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big) \to (X, \mathcal{A})$ é uma função mensurável.

Para verificar a mensurabilidade de uma função $f : (X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ não é necessário verificar que $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ *para todo* $E \in \mathcal{A}'$, mas apenas para E pertencente a um conjunto de geradores de $\mathcal{A}'$. Esse é o conteúdo do seguinte:

2.1.5. LEMA. *Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ espaços mensuráveis e seja $\mathcal{C}$ um conjunto de geradores para a σ-álgebra $\mathcal{A}'$. Uma função $f : X \to X'$ é mensurável se e somente se $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$, para todo $E \in \mathcal{C}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}'$, temos obviamente que $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ para todo $E \in \mathcal{C}$, caso f seja mensurável. Suponha então que $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ para todo $E \in \mathcal{C}$. Verifica-se diretamente que a coleção:

$$\big\{E \in \wp(X') : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\big\} \tag{2.1.1}$$

é uma σ-álgebra de partes de X'. Por hipótese, (2.1.1) contém $\mathcal{C}$ e portanto contém $\mathcal{A}' = \sigma[\mathcal{C}]$. Isso mostra que $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ para todo $E \in \mathcal{A}'$, i.e., f é mensurável. $\square$

2.1.6. Corolário. *Se* $(X,\mathcal{A})$ *é um espaço mensurável então uma função* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *é mensurável se e somente se* $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$, *para todo aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$. □

2.1.7. Corolário. *Se* $(X,\mathcal{A})$ *é um espaço mensurável então uma função* $f : X \to \mathbb{R}$ *é mensurável se e somente se o conjunto:*

$$f^{-1}\big(\,]-\infty, c]\,\big) = \big\{x \in X : f(x) \le c\big\}$$

está em $\mathcal{A}$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Segue do Lema 2.1.5, tendo em mente o resultado do Exercício 1.25. □

2.1.8. Corolário. *Se* $(X,\mathcal{A})$ *é um espaço mensurável então uma função* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *é mensurável se e somente se o conjunto:*

$$f^{-1}\big([-\infty, c]\big) = \big\{x \in X : f(x) \le c\big\}$$

está em $\mathcal{A}$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Segue do Lema 2.1.5, tendo em mente o resultado do Exercício 2.5. □

2.1.9. Lema. *A composta de duas funções mensuráveis é uma função mensurável, i.e., se* $(X,\mathcal{A})$, $(X',\mathcal{A}')$, $(X'',\mathcal{A}'')$ *são espaços mensuráveis e se* $f : (X,\mathcal{A}) \to (X',\mathcal{A}')$, $g : (X',\mathcal{A}') \to (X'',\mathcal{A}'')$ *são funções mensuráveis então a função* $g \circ f : (X,\mathcal{A}) \to (X'',\mathcal{A}'')$ *também é mensurável.*

Demonstração. Dado $E \in \mathcal{A}''$ devemos verificar que $(g\circ f)^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Mas $(g \circ f)^{-1}(E) = f^{-1}\big(g^{-1}(E)\big)$; temos $g^{-1}(E) \in \mathcal{A}'$, pois g é mensurável, e $f^{-1}\big(g^{-1}(E)\big) \in \mathcal{A}$, pois f é mensurável. □

É necessário cüidado na utilização do Lema 2.1.9; para concluir a mensurabilidade de $g \circ f$ a partir da mensurabilidade de f e de g é necessário que a σ-álgebra fixada para o contra-domínio de f e para o domínio de g sejam as mesmas. Em vista da convenção 2.1.3, se $f : (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \to (X',\mathcal{A}')$ são funções mensuráveis então *não podemos* usar o Lema 2.1.9 para concluir que $g\circ f$ é mensurável já que adotamos a σ-álgebra de Borel para o contra-domínio de f e a σ-álgebra de conjuntos Lebesgue mensuráveis para o domínio de g. Nós poderíamos utilizar o Lema 2.1.9 para concluir que $g \circ f$ é mensurável caso soubéssemos, por exemplo, que f é mensurável e que g é *Borel mensurável*.

Se f é uma função definida num espaço mensurável $(X,\mathcal{A})$ então em muitas situações é interessante considerar restrições de f a subconjuntos de X e gostaríamos que tais subconjuntos de X pudessem ser encarados como espaços mensuráveis. Dado então um subconjunto $Y \subset X$, definimos:

$$\mathcal{A}|_Y = \big\{E \cap Y : E \in \mathcal{A}\big\}; \tag{2.1.2}$$

é fácil ver que $\mathcal{A}|_Y$ é uma σ-álgebra de partes de Y (veja Exercício 2.2).

2.1.10. DEFINIÇÃO. Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de um conjunto X e se Y é um subconjunto de X então a σ-álgebra $\mathcal{A}|_Y$ de partes de Y definida em (2.1.2) é chamada a *σ-álgebra induzida em Y por $\mathcal{A}$*. Dizemos então que $(Y, \mathcal{A}|_Y)$ é um *subespaço* do espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$.

Observe que se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável e se $Y \in \mathcal{A}$ então os elementos da σ-álgebra induzida $\mathcal{A}|_Y$ são precisamente os elementos de $\mathcal{A}$ que estão contidos em Y; em símbolos:

$$\mathcal{A}|_Y = \mathcal{A} \cap \wp(Y).$$

Em outras palavras, se Y é mensurável então os subconjuntos mensuráveis do subespaço mensurável Y de X são precisamente os subconjuntos mensuráveis de X que estão contidos em Y.

2.1.11. CONVENÇÃO. Se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável e se Y é um subconjunto de X então, a menos de menção explícita em contrário, consideraremos sempre o conjunto Y munido da σ-álgebra induzida $\mathcal{A}|_Y$.

Em vista das convenções 2.1.11 e 2.1.3, observamos que:

- se um subconjunto Y de $\mathbb{R}^n$ (resp., um subconjunto Y de $\overline{\mathbb{R}}$) aparece no contra-domínio de uma função, consideramo-lo munido da σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|_Y$ induzida da σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ (resp., da σ-álgebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_Y$ induzida da σ-álgebra de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$);
- se um subconjunto Y de $\mathbb{R}^n$ aparece no domínio de uma função, consideramo-lo munido da σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_Y$ induzida da σ-álgebra de subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $\mathbb{R}^n$;
- se Y é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ (resp., um subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$) e se $(X, \mathcal{A})$ é um espaço mensurável então uma função $f : Y \to (X, \mathcal{A})$ é dita *Borel mensurável* quando a função $f : \big(Y, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)|_Y\big) \to (X, \mathcal{A})$ (resp., a função $f : \big(Y, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_Y\big) \to (X, \mathcal{A})$) for mensurável.

2.1.12. LEMA. *Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ espaços mensuráveis e $Y \subset X$ um subconjunto. Então:*

(a) *a aplicação inclusão $i : Y \to X$ é mensurável;*
(b) *se $f : X \to X'$ é uma função mensurável então $f|_Y : Y \to X'$ também é mensurável;*
(c) *dada uma função $f : X' \to X$ com imagem contida em Y, se $f_0 : X' \to Y$ denota a função que difere de f apenas pelo contra-domínio então f é mensurável se e somente se f_0 é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO.

- *Prova de* (a).
  Basta observar que $i^{-1}(E) = E \cap Y \in \mathcal{A}|_Y$, para todo $E \in \mathcal{A}$.

- *Prova de* (b).
  Basta observar que $f|_Y = f \circ i$ e usar o Lema 2.1.9 juntamente com o item (a) acima.

- *Prova de* (c).

  Se f_0 é mensurável então $f = i \circ f_0$ é mensurável, pelo Lema 2.1.9 e pelo item (a) acima. Reciprocamente, suponha que f é mensurável. Dado $E_1 \in \mathcal{A}|_Y$, devemos mostrar que $f_0^{-1}(E_1)$ (que é igual a $f^{-1}(E_1)$) pertence a $\mathcal{A}'$. Mas $E_1 = E \cap Y$ para algum $E \in \mathcal{A}$ e portanto, como $\mathrm{Im}(f) \subset Y$, temos $f^{-1}(E_1) = f^{-1}(E) \in \mathcal{A}'$. □

2.1.13. Lema. *Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ espaços mensuráveis e seja dada $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ uma cobertura enumerável de X por conjuntos mensuráveis $X_i \in \mathcal{A}$. Então uma função $f : X \to X'$ é mensurável se e somente se $f|_{X_i} : X_i \to X'$ é mensurável para todo $i \in I$.*

Demonstração. Se f é mensurável então $f|_{X_i}$ é mensurável para todo $i \in I$, pelo Lema 2.1.12. Reciprocamente, suponha que $f|_{X_i}$ seja mensurável para todo $i \in I$. Dado $E \in \mathcal{A}'$, temos:

$$(f|_{X_i})^{-1}(E) = f^{-1}(E) \cap X_i \in \mathcal{A}|_{X_i},$$

para todo $i \in I$. Como $X_i \in \mathcal{A}$, temos $\mathcal{A}|_{X_i} = \mathcal{A} \cap \wp(X_i)$ e portanto $f^{-1}(E) \cap X_i \in \mathcal{A}$, para todo $i \in I$. Como I é enumerável segue que:

$$f^{-1}(E) = \bigcup_{i \in I} \big(f^{-1}(E) \cap X_i\big) \in \mathcal{A},$$

e portanto f é uma função mensurável. □

2.1.14. Corolário. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e Y um subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$. Uma função $f : Y \to X$ é Borel mensurável se e somente se $f|_{Y \cap \mathbb{R}} : Y \cap \mathbb{R} \to X$ é Borel mensurável.*

Demonstração. Temos que $Y = (Y \setminus \mathbb{R}) \cup (Y \cap \mathbb{R})$, onde:

$$Y \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_Y, \quad Y \setminus \mathbb{R} = Y \cap \{+\infty, -\infty\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_Y.$$

Segue do Lema 2.1.13 que f é Borel mensurável se e somente se suas restrições a $Y \setminus \mathbb{R}$ e a $Y \cap \mathbb{R}$ são Borel mensuráveis. Mas todos os quatro subconjuntos de $\{+\infty, -\infty\}$ são Boreleanos de $\overline{\mathbb{R}}$ e portanto a σ-álgebra induzida por $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_Y$ em $Y \setminus \mathbb{R}$ é $\wp(Y \setminus \mathbb{R})$. Em particular, a restrição de f a $Y \setminus \mathbb{R}$ é Borel mensurável, seja qual for $f : Y \to X$. A conclusão segue. □

2.1.15. Lema. *Dado um subconjunto arbitrário $Y \subset \mathbb{R}^m$, então toda função contínua $f : Y \to \mathbb{R}^n$ é Borel mensurável.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.1.6, é suficiente mostrar que:

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)|_Y,$$

para todo aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Mas, como f é contínua, temos que $f^{-1}(U)$ é aberto relativamente a Y, i.e., existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^m$ com:

$$f^{-1}(U) = V \cap Y;$$

daí $V \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ e portanto $f^{-1}(U) = V \cap Y \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)|_Y$. □

2.1.16. LEMA. *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável e seja* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *uma função com funções coordenadas* $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. *Então* $f : X \to \mathbb{R}^n$ *é mensurável se e somente se* $f_i : X \to \mathbb{R}$ *for mensurável, para todo* $i = 1, \ldots, n$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos $f_i = \pi_i \circ f$, onde $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota a i-ésima projeção. A função π_i é contínua e portanto Borel mensurável, pelo Lema 2.1.15; segue então do Lema 2.1.9 que a mensurabilidade de f implica na mensurabilidade de cada f_i. Reciprocamente, suponha que cada f_i é mensurável. Em vista do Lema 1.4.23, a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ coincide com a σ-álgebra gerada pelos blocos retangulares n-dimensionais. Segue então do Lema 2.1.5 que, para mostrar a mensurabilidade de f, é suficiente mostrar que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo bloco retangular n-dimensional B. Se $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, então:

$$f^{-1}(B) = \big\{x \in X : f_i(x) \in [a_i, b_i],\ i = 1, \ldots, n\big\} = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}\big([a_i, b_i]\big).$$

Como cada f_i é mensurável, temos $f_i^{-1}\big([a_i, b_i]\big) \in \mathcal{A}$ para todo i e portanto $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. □

2.1.17. COROLÁRIO. *Sejam* $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ *espaços mensuráveis e sejam* $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *funções mensuráveis. Dada uma função Borel mensurável* $\phi : Y \to X'$ *definida num subconjunto* $Y \subset \mathbb{R}^n$ *tal que:*

$$\big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \in Y,$$

para todo $x \in X$ *então a função:*

$$\phi \circ (f_1, \ldots, f_n) : X \ni x \longmapsto \phi\big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \in X'$$

é mensurável.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Lema 2.1.16 e pelo item (c) do Lema 2.1.12 temos que a função $(f_1, \ldots, f_n) : X \to Y$ é mensurável. A conclusão segue do Lema 2.1.9. □

Se $f : X \to \mathbb{R}^n$, $g : X \to \mathbb{R}^n$ são funções definidas num conjunto arbitrário X então, como é usual, definimos a *soma* $f + g : X \to \mathbb{R}^n$ das funções f e g fazendo $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in X$; para $n = 1$, podemos definir também o *produto* $fg : X \to \mathbb{R}^n$ fazendo $(fg)(x) = f(x)g(x)$, para todo $x \in X$.

2.1.18. COROLÁRIO. *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço mensurável. Dadas funções mensuráveis* $f : X \to \mathbb{R}^n$, $g : X \to \mathbb{R}^n$ *então:*

- *a soma* $f + g : X \to \mathbb{R}^n$ *é uma função mensurável;*
- *se* $n = 1$, *o produto* $fg : X \to \mathbb{R}$ *é uma função mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. As funções:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \longmapsto x + y \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \longmapsto xy \in \mathbb{R}$$

são contínuas e portanto Borel mensuráveis, pelo Lema 2.1.15. A conclusão segue do Corolário 2.1.17. □

Note que para funções $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ a valores na reta estendida, também podemos definir a soma $f + g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, desde que a soma $f(x)+g(x)$ esteja bem definida (i.e., não seja da forma $(+\infty)+(-\infty)$ ou $(-\infty) + (+\infty)$) para todo $x \in X$. O produto $fg : X \to \overline{\mathbb{R}}$ pode ser definido sempre, sem nenhuma restrição sobre f e g.

2.1.19. Proposição. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Sejam dadas funções mensuráveis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Então:*

- *se a soma $f(x) + g(x)$ estiver bem definida para todo $x \in X$ então a função $f + g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável;*
- *o produto $fg : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável.*

Demonstração. Considere os seguintes subconjuntos de X:

$$f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R}),$$
$$f^{-1}(+\infty) \cup g^{-1}(+\infty),$$
$$f^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(-\infty);$$

todos eles pertencem a $\mathcal{A}$ e sua união é igual a X. A restrição de $f + g$ a cada um deles é mensurável; de fato, a restrição de $f + g$ ao primeiro deles é mensurável pelo Corolário 2.1.18 e a restrição de $f + g$ aos outros é uma função constante (veja Exercício 2.1). Segue então do Lema 2.1.13 que $f + g$ é mensurável. A mensurabilidade de fg é mostrada de forma similar considerando as restrições de fg aos conjuntos:

$$f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R}),$$
$$f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0),$$
$$\big[f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}\big(\,]0, +\infty]\,\big)\big] \cup \big[f^{-1}\big(\,]0, +\infty]\,\big) \cap g^{-1}(+\infty)\big],$$
$$\big[f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}\big([-\infty, 0[\,\big)\big] \cup \big[f^{-1}\big([-\infty, 0[\,\big) \cap g^{-1}(-\infty)\big],$$
$$\big[f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}\big([-\infty, 0[\,\big)\big] \cup \big[f^{-1}\big([-\infty, 0[\,\big) \cap g^{-1}(+\infty)\big],$$
$$\big[f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}\big(\,]0, +\infty]\,\big)\big] \cup \big[f^{-1}\big(\,]0, +\infty]\,\big) \cap g^{-1}(-\infty)\big].$$ □

2.1.20. Definição. Dado $x \in \overline{\mathbb{R}}$ então a *parte positiva* e a *parte negativa* de x, denotadas respectivamente por x^+ e x^-, são definidas por:

$$x^+ = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad x^- = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0, \\ -x, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Se f é uma função tomando valores em $\overline{\mathbb{R}}$ então a *parte positiva* e a *parte negativa* de f, denotadas respectivamente por f^+ e f^-, são definidas por $f^+(x) = [f(x)]^+$ e $f^-(x) = [f(x)]^-$, para todo x no domínio de f.

É fácil ver que $x = x^+ - x^-$ e $|x| = x^+ + x^-$, para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$; em particular, se f é uma função tomando valores em $\overline{\mathbb{R}}$ então:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{e} \quad |f| = f^+ + f^-,$$

onde, obviamente, $|f|$ denota a função $|f|(x) = |f(x)|$.

2.1.21. Lema. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável então as funções f^+, f^- e $|f|$ também são mensuráveis.*

Demonstração. Segue do Lema 2.1.15 e do Corolário 2.1.14 que as funções:

$$\overline{\mathbb{R}} \ni x \longmapsto x^+ \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \overline{\mathbb{R}} \ni x \longmapsto x^- \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \overline{\mathbb{R}} \ni x \longmapsto |x| \in \overline{\mathbb{R}}$$

são Borel mensuráveis; de fato, observe que suas restrições a $\mathbb{R}$ são funções contínuas. A conclusão segue do Lema 2.1.9. □

2.1.22. Lema. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja $(f_k)_{k \ge 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Então as funções:*

$$\sup_{k \ge 1} f_k : X \ni x \longmapsto \sup_{k \ge 1} f_k(x) \in \overline{\mathbb{R}} \quad \textit{e} \quad \inf_{k \ge 1} f_k : X \ni x \longmapsto \inf_{k \ge 1} f_k(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

são mensuráveis.

Demonstração. Note que para todo $x \in X$ temos $\sup_{k \ge 1} f_k(x) \le c$ se e somente se $f_k(x) \le c$ para todo $k \ge 1$; logo:

$$\Big\{ x \in X : \sup_{k \ge 1} f_k(x) \le c \Big\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}\big([-\infty, c]\big) \in \mathcal{A},$$

para todo $c \in \mathbb{R}$. Além do mais, para todo $x \in X$, temos $\inf_{k \ge 1} f_k(x) \le c$ se e somente se para todo $r \ge 1$ existe $k \ge 1$ tal que $f_k(x) \le c + \frac{1}{r}$; logo:

$$\Big\{ x \in X : \inf_{k \ge 1} f_k(x) \le c \Big\} = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}\big(\big[-\infty, c + \tfrac{1}{r}\big]\big) \in \mathcal{A},$$

para todo $c \in \mathbb{R}$. A conclusão segue do Corolário 2.1.8. □

2.1.23. Corolário. *Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja $(f_k)_{k \ge 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Então as funções:*

$$\limsup_{k \to \infty} f_k : X \ni x \longmapsto \limsup_{k \to \infty} f_k(x) \in \overline{\mathbb{R}},$$
$$\liminf_{k \to \infty} f_k : X \ni x \longmapsto \liminf_{k \to \infty} f_k(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

são mensuráveis.

Demonstração. Basta observar que:

$$\limsup_{k \to \infty} f_k = \inf_{r \ge 1} \sup_{k \ge r} f_k, \quad \liminf_{k \to \infty} f_k = \sup_{r \ge 1} \inf_{k \ge r} f_k.$$ □

2.1.24. COROLÁRIO. *Seja $(X,\mathcal{A})$ um espaço mensurável e seja $(f_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Se para todo $x \in X$ a seqüência $\big(f_k(x)\big)_{k\geq 1}$ converge em $\overline{\mathbb{R}}$ então a função:*

$$\lim_{k\to\infty} f_k : X \ni x \longmapsto \lim_{k\to\infty} f_k(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

é mensurável.

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que:

$$\lim_{k\to\infty} f_k = \liminf_{k\to\infty} f_k = \limsup_{k\to\infty} f_k. \qquad \square$$

2.1.1. Funções Simples.

2.1.25. DEFINIÇÃO. Uma função é dita *simples* quando sua imagem é um conjunto finito.

2.1.26. LEMA. *Seja X um conjunto e sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções simples.*

- *se a soma $f(x) + g(x)$ estiver bem definida para todo $x \in X$ então a função $f + g$ é simples;*
- *o produto fg é uma função simples.*

DEMONSTRAÇÃO. A imagem de $f + g$ está contida no conjunto:

$$\big\{a + b : a \in \mathrm{Im}(f),\, b \in \mathrm{Im}(g) \text{ e a soma } a + b \text{ está bem definida}\big\};$$

tal conjunto é obviamente finito. Similarmente, a imagem de fg está contida no conjunto finito $\{ab : a \in \mathrm{Im}(f),\, b \in \mathrm{Im}(g)\big\}$. $\square$

2.1.27. LEMA. *Sejam $(X,\mathcal{A})$ um espaço mensurável e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função simples. Então f é mensurável se e somente se $f^{-1}(c) \in \mathcal{A}$ para todo $c \in \mathrm{Im}(f)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se f é uma função mensurável então $f^{-1}(c) \in \mathcal{A}$ para todo $c \in \mathrm{Im}(f)$, já que $\{c\}$ é um Boreleano de $\overline{\mathbb{R}}$. Reciprocamente, se $f^{-1}(c) \in \mathcal{A}$ para todo $c \in \mathrm{Im}(f)$ então a mensurabilidade de f segue do Lema 2.1.13, já que:

$$X = \bigcup_{c\in \mathrm{Im}(f)} f^{-1}(c)$$

é uma cobertura finita de X por conjuntos mensuráveis e a restrição de f a cada conjunto $f^{-1}(c)$ é mensurável (veja Exercício 2.1). $\square$

2.1.28. DEFINIÇÃO. Seja X um conjunto e seja $A \subset X$ um subconjunto de X. A *função característica* de A, definida em X, é a função $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definida por $\chi_A(x) = 1$ para $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ para $x \in X \setminus A$.

Observe que a notação χ_A não deixa explícito qual seja o domínio X da função característica de A que está sendo considerada; em geral, tal domínio deve ser deixado claro pelo contexto.

2.1.29. Observação. Se $(X,\mathcal{A})$ é um espaço mensurável e se $A\subset X$ é um subconjunto então a função característica $\chi_A : X\to\mathbb{R}$ é uma função simples. Segue do Lema 2.1.27 que χ_A é uma função mensurável se e somente se $A\in\mathcal{A}$.

2.1.30. Observação. Se $(X,\mathcal{A})$ é um espaço mensurável então, dados $A_1,\ldots,A_k\in\mathcal{A}$ e $c_1,\ldots,c_k\in\overline{\mathbb{R}}$, temos que a função:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i\chi_{A_i} : X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}} \tag{2.1.3}$$

é simples e mensurável, desde que esteja bem definida (i.e., desde que não ocorra $A_i\cap A_j\neq\emptyset$ com $c_i=+\infty$ e $c_j=-\infty$). De fato, isso segue da Proposição 2.1.19, do Lema 2.1.26 e da Observação 2.1.29. Reciprocamente, se $f : X\to\overline{\mathbb{R}}$ é uma função simples e mensurável, podemos escrevê-la na forma (2.1.3), com $A_i\in\mathcal{A}$ e $c_i\in\overline{\mathbb{R}}$, $i=1,\ldots,k$. De fato, basta tomar $A_i=f^{-1}(c_i)$, onde c_1, …, c_k são os elementos (distintos) do conjunto finito $\mathrm{Im}(f)$. Note que os conjuntos A_i assim construídos constituem uma partição de X.

2.1.31. Lema. *Sejam $(X,\mathcal{A})$ um espaço mensurável, $f : X\to\overline{\mathbb{R}}$ uma função e $Y\in\mathcal{A}$. Então:*

(a) *$f|_Y$ é mensurável se e somente se $f\chi_Y$ é mensurável;*
(b) *$f|_Y$ é simples se e somente se $f\chi_Y$ é simples.*

Demonstração. Temos $X=Y\cup Y^{\mathrm{c}}$, com $Y,Y^{\mathrm{c}}\in\mathcal{A}$; além do mais, $f|_Y=(f\chi_Y)|_Y$ e $(f\chi_Y)|_{Y^{\mathrm{c}}}\equiv 0$. Tendo em mente essas observações, o item (a) segue do Lema 2.1.13. O item (b) segue da igualdade:

$$f(Y)\setminus\{0\}=\mathrm{Im}(f\chi_Y)\setminus\{0\}. \qquad\square$$

2.1.32. Notação. Seja $(f_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de funções $f_k : X\to\overline{\mathbb{R}}$ e seja $f : X\to\overline{\mathbb{R}}$ uma função, onde X é um conjunto arbitrário. Escrevemos $f_k\nearrow f$ quando $f_k(x)\leq f_{k+1}(x)$ para todo $x\in X$ e todo $k\geq 1$ e $\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$ para todo $x\in X$. Similarmente, escrevemos $f_k\searrow f$ quando $f_k(x)\geq f_{k+1}(x)$ para todo $x\in X$ e todo $k\geq 1$ e $\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$ para todo $x\in X$.

2.1.33. Proposição. *Sejam $(X,\mathcal{A})$ um espaço mensurável. Para toda função mensurável $f : X\to[0,+\infty]$ existe uma seqüência $(f_k)_{k\geq 1}$ de funções simples e mensuráveis $f_k : X\to[0,+\infty[$ tal que $f_k\nearrow f$.*

Demonstração. Para cada $k\geq 1$ particionamos o intervalo $[0,k[$ em intervalos disjuntos de comprimento $\frac{1}{2^k}$; mais explicitamente, consideramos os intervalos:

$$\left[\tfrac{r}{2^k},\tfrac{r+1}{2^k}\right[,\quad r=0,1,\ldots,k2^k-1. \tag{2.1.4}$$

Para cada $x\in X$ temos $f(x)\geq k$ ou então $f(x)$ pertence a exatamente um dos intervalos (2.1.4); se $f(x)\geq k$ definimos $f_k(x)=k$ e, caso contrário, tomamos $f_k(x)$ como sendo a extremidade esquerda do intervalo da coleção (2.1.4) ao qual $f(x)$ pertence. Em símbolos, temos:

$$f_k = k\,\chi_{f^{-1}\left([k,+\infty]\right)} + \sum_{r=0}^{k2^k-1} \frac{r}{2^k}\,\chi_{f^{-1}\left(\left[\frac{r}{2^k},\frac{r+1}{2^k}\right[\right)}.$$

Temos então que f_k é uma função simples e mensurável para todo $k \geq 1$ (veja Observação 2.1.30). Note que:

$$\big|f_k(x) - f(x)\big| < \frac{1}{2^k}, \tag{2.1.5}$$

para todo $x \in X$ com $f(x) < k$. Afirmamos que $\lim_{k\to\infty} f_k = f$. De fato, seja $x \in X$ fixado. Se $f(x) < +\infty$ então vale (2.1.5) para $k > f(x)$ e portanto $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$. Se $f(x) = +\infty$ então $f_k(x) = k$ para todo $k \geq 1$ e portanto $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = +\infty = f(x)$. Para completar a demonstração, vamos mostrar agora que:

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x), \tag{2.1.6}$$

para todos $x \in X$ e $k \geq 1$. Sejam $x \in X$ e $k \geq 1$ fixados. Se $f(x) \geq k+1$, então $f_k(x) = k$ e $f_{k+1}(x) = k+1$, donde (2.1.6) é satisfeita. Senão, seja $r = 0, \ldots, (k+1)2^{k+1} - 1$ o único inteiro tal que $\frac{r}{2^{k+1}} \leq f(x) < \frac{r+1}{2^{k+1}}$; temos $f_{k+1}(x) = \frac{r}{2^{k+1}}$. Seja s o maior inteiro menor ou igual a $\frac{r}{2}$; daí $s \leq \frac{r}{2} < \frac{r+1}{2} \leq s+1$ e portanto:

$$\frac{s}{2^k} \leq \frac{r}{2^{k+1}} \leq f(x) < \frac{r+1}{2^{k+1}} \leq \frac{s+1}{2^k}.$$

Se $f(x) \in [0,k[$, segue que $f_k(x) = \frac{s}{2^k} \leq \frac{r}{2^{k+1}} = f_{k+1}(x)$. Caso contrário, se $f(x) \in [k,k+1[$ então $r \geq k2^{k+1}$ e $f_{k+1}(x) = \frac{r}{2^{k+1}} \geq k = f_k(x)$. Em todo caso, a desigualdade (2.1.6) é satisfeita. $\square$

2.2. Integrando Funções Simples não Negativas

Ao longo de toda esta seção consideramos fixado um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Recorde que uma função $f : X \to [0,+\infty]$ é simples e mensurável se e somente se $\mathrm{Im}(f)$ é um subconjunto finito de $[0,+\infty]$ e $f^{-1}(c) \in \mathcal{A}$ para todo $c \in \mathrm{Im}(f)$ (vide Definição 2.1.25 e Lema 2.1.27).

2.2.1. Definição. Se $f : X \to [0,+\infty]$ é uma função simples, mensurável e não negativa então a *integral* de f é definida por:

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{c\in\mathrm{Im}(f)} c\,\mu\big(f^{-1}(c)\big).$$

A integral $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ será também às vezes denotada por:

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Obviamente, para toda função simples mensurável $f : X \to [0, +\infty]$, temos:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq 0.$$

Se $Y \in \mathcal{A}$ é um conjunto mensurável então é fácil ver que a restrição de μ à σ-álgebra $\mathcal{A}|_Y = \mathcal{A} \cap \wp(Y)$ é também uma medida, de modo que a trinca $(Y, \mathcal{A}|_Y, \mu|_{(\mathcal{A}|_Y)})$ é um espaço de medida. Se f é uma função a valores em $\overline{\mathbb{R}}$ cujo domínio contém Y e tal que $f|_Y$ é simples, mensurável e não negativa então a integral de $f|_Y$ será denotada por:

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\mu = \int_Y f(x) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

2.2.2. Lema. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função e seja $Y \in \mathcal{A}$. Suponha que $f|_Y$ é simples, mensurável e não negativa (pelo Lema 2.1.31 isso equivale a dizer que $f\chi_Y$ é simples, mensurável e não negativa). Então:*

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_Y \,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. Temos:

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{c \in f(Y)} c\, \mu\big((f|_Y)^{-1}(c)\big) = \sum_{\substack{c \in f(Y) \\ c \neq 0}} c\, \mu\big((f|_Y)^{-1}(c)\big),$$

$$\int_X f\chi_Y \,\mathrm{d}\mu = \sum_{c \in \mathrm{Im}(f\chi_Y)} c\, \mu\big((f\chi_Y)^{-1}(c)\big) = \sum_{\substack{c \in \mathrm{Im}(f\chi_Y) \\ c \neq 0}} c\, \mu\big((f\chi_Y)^{-1}(c)\big).$$

A conclusão segue das igualdades acima observando que para todo $c \neq 0$, temos $c \in f(Y)$ se e somente se $c \in \mathrm{Im}(f\chi_Y)$ e, nesse caso:

$$(f|_Y)^{-1}(c) = f^{-1}(c) \cap Y = (f\chi_Y)^{-1}(c). \qquad \square$$

2.2.3. Lema. *Sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ conjuntos dois a dois disjuntos e sejam $c_1, \ldots, c_k \in [0, +\infty]$. Então:*

$$\int_X \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^k c_i \mu(A_i). \tag{2.2.1}$$

Demonstração. Eliminando os índices i tais que $c_i = 0$ ou $A_i = \emptyset$ não alteramos o resultado de nenhum dos dois lados da igualdade (2.2.1); podemos portanto supor que $c_i \neq 0$ e $A_i \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Seja $f = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i}$. Temos $\mathrm{Im}(f) \setminus \{0\} = \{c_1, \ldots, c_k\}$; note que é possível ter $c_i = c_j$ para $i \neq j$. Para $c \in \mathrm{Im}(f)$, $c \neq 0$, temos:

$$f^{-1}(c) = \bigcup_{\substack{i=1 \\ c_i = c}}^k A_i$$

e portanto:

$$\mu\big(f^{-1}(c)\big) = \sum_{\substack{i=1\\ c_i=c}}^{k} \mu(A_i).$$

Logo:

$$\begin{aligned}\int_X f\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{c\in\mathrm{Im}(f)} c\,\mu\big(f^{-1}(c)\big) = \sum_{\substack{c\in\mathrm{Im}(f)\\ c\neq 0}} c\,\mu\big(f^{-1}(c)\big) = \sum_{\substack{c\in\mathrm{Im}(f)\\ c\neq 0}} \sum_{\substack{i=1\\ c_i=c}}^{k} c\mu(A_i)\\ &= \sum_{\substack{c\in\mathrm{Im}(f)\\ c\neq 0}} \sum_{\substack{i=1\\ c_i=c}}^{k} c_i\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i\mu(A_i),\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato que o conjunto $\{1,\ldots,k\}$ é união disjunta dos conjuntos $\big\{i\in\{1,\ldots,k\} : c_i = c\big\}$, com $c\in\mathrm{Im}(f)$, $c\neq 0$. □

2.2.4. Lema. *Sejam $f : X \to [0,+\infty]$, $g : X \to [0,+\infty]$ funções simples e mensuráveis. Então:*

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. Podemos escrever:

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i\chi_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{l} d_j\chi_{B_j},$$

onde tanto os conjuntos $A_1,\ldots,A_k\in\mathcal{A}$ como os conjuntos $B_1,\ldots,B_l\in\mathcal{A}$ constituem uma partição de X (veja Observação 2.1.30). Temos:

$$\sum_{j=1}^{l} \chi_{B_j} = 1$$

e portanto:

$$\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{l} \chi_{A_i}\chi_{B_j} = \sum_{j=1}^{l} \chi_{A_i\cap B_j},$$

para todo $i = 1,\ldots,k$; daí:

$$f = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} c_i\chi_{A_i\cap B_j}. \tag{2.2.2}$$

Como os conjuntos $A_i\cap B_j$, $i = 1,\ldots,k$, $j = 1,\ldots,l$ são dois a dois disjuntos, o Lema 2.2.3 nos dá:

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} c_i\mu(A_i\cap B_j). \tag{2.2.3}$$

Analogamente, mostra-se que:

$$g = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} d_j \chi_{B_j \cap A_i} \tag{2.2.4}$$

e portanto:

$$\int_X g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} d_j \mu(B_j \cap A_i). \tag{2.2.5}$$

De (2.2.2) e (2.2.4) obtemos:

$$f + g = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (c_i + d_j) \chi_{A_i \cap B_j};$$

novamente, o Lema 2.2.3 nos dá:

$$\int_X (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (c_i + d_j) \mu(A_i \cap B_j). \tag{2.2.6}$$

A conclusão segue de (2.2.3), (2.2.5) e (2.2.6). □

2.2.5. Corolário. *Dados $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ (conjuntos não necessariamente disjuntos) e $c_1, \ldots, c_k \in [0, +\infty]$ então:*

$$\int_X \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(A_i).$$

Demonstração. Basta observar que:

$$\int_X \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \int_X c_i \chi_{A_i} \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(A_i).$$ □

2.2.6. Notação. Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ são funções então escrevemos $f \le g$ quando $f(x) \le g(x)$, para todo $x \in X$.

2.2.7. Corolário. *Sejam $f : X \to [0, +\infty]$, $g : X \to [0, +\infty]$ funções simples mensuráveis. Se $f \le g$ então:*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. Defina $h : X \to [0, +\infty]$ fazendo:

$$h(x) = \begin{cases} g(x) - f(x), & \text{se } x \in f^{-1}\big([0, +\infty[\big), \\ 0, & \text{se } x \in f^{-1}(+\infty), \end{cases}$$

para todo $x \in X$. Temos $g = f + h$. A função h é mensurável, pelo Lema 2.1.13 e pela Proposição 2.1.19. Além do mais, a função h é simples já que sua imagem está contida no conjunto finito:

$$\{0\} \cup \big\{a - b : a \in \mathrm{Im}(g),\, b \in \mathrm{Im}(f) \text{ e } b < +\infty\big\}.$$

Segue então do Lema 2.2.4 que:

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X h \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X f \,\mathrm{d}\mu,$$

já que $\int_X h \,\mathrm{d}\mu \geq 0$. □

2.2.8. Lema. *Sejam $f : X \to [0, +\infty]$ uma função simples mensurável e $c \in [0, +\infty]$. Então:*

$$\int_X cf \,\mathrm{d}\mu = c \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. Escreva:

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i},$$

onde os conjuntos $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ constituem uma partição de X. Daí:

$$cf = \sum_{i=1}^{k} cc_i \chi_{A_i}.$$

O Lema 2.2.3 nos dá então:

$$\int_X cf \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} cc_i \mu(A_i) = c \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(A_i) = c \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$ □

2.3. Integrando Funções Mensuráveis não Negativas

Ao longo de toda esta seção consideramos fixado um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dada uma função mensurável não negativa $f : X \to [0, +\infty]$ consideramos o conjunto:

$$\mathcal{I}(f) = \Big\{ \int_X \phi \,\mathrm{d}\mu : \phi : X \to [0, +\infty] \text{ é função simples mensurável tal que } \phi \leq f \Big\} \subset [0, +\infty]. \tag{2.3.1}$$

Observe que o conjunto $\mathcal{I}(f)$ não é vazio, já que a função $\phi \equiv 0$ é simples, mensurável, não negativa e menor ou igual a f, de modo que $0 \in \mathcal{I}(f)$. Afirmamos que se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função simples mensurável então:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sup \mathcal{I}(f).$$

De fato, nesse caso f é uma função simples, mensurável, não negativa e menor ou igual a f, de modo que $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in \mathcal{I}(f)$ e $\sup \mathcal{I}(f) \geq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. Por outro lado, o Corolário 2.2.7 implica que $\int_X \phi \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ para toda função simples mensurável $\phi : X \to [0, +\infty]$ tal que $\phi \leq f$; portanto $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ é uma cota superior de $\mathcal{I}(f)$ e $\sup \mathcal{I}(f) \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

Em vista das considerações acima podemos introduzir a seguinte:

2.3.1. Definição. Se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável não negativa então a *integral* de f é definida por:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sup \mathcal{I}(f) \in [0, +\infty],$$

onde $\mathcal{I}(f)$ é o conjunto definido em (2.3.1).

Como no caso de funções simples, a integral $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ será também às vezes denotada por:

$$\int_X f(x) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Além do mais, se $Y \in \mathcal{A}$ e se f é uma função a valores em $\overline{\mathbb{R}}$ cujo domínio contém Y e tal que $f|_Y$ é mensurável e não negativa então a integral de $f|_Y$ com respeito à medida $\mu|_{(\mathcal{A}|_Y)}$ será denotada por:

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\mu = \int_Y f(x) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

2.3.2. Lema. *Sejam $f : X \to [0, +\infty]$, $g : X \to [0, +\infty]$ funções mensuráveis. Se $f \le g$ então:*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \le \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. Se $\phi : X \to [0, +\infty]$ é uma função simples mensurável tal que $\phi \le f$ então também $\phi \le g$; isso implica que $\mathcal{I}(f) \subset \mathcal{I}(g)$ e portanto $\sup \mathcal{I}(f) \le \sup \mathcal{I}(g)$. □

2.3.3. Teorema (da convergência monotônica). *Seja $(f_n)_{n\ge1}$ uma seqüência de funções mensuráveis não negativas $f_n : X \to [0, +\infty]$. Se $f_n \nearrow f$ então $f : X \to [0, +\infty]$ é mensurável e:*

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. A mensurabilidade de f segue do Corolário 2.1.24. O Lema 2.3.2 implica que $\big(\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu\big)_{n\ge1}$ é uma seqüência crescente e que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \le \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Para mostrar a desigualdade oposta, é suficiente verificar que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \ge \int_X \phi \,\mathrm{d}\mu, \tag{2.3.2}$$

para toda função simples mensurável $\phi : X \to [0, +\infty]$ tal que $\phi \le f$. Escreva $\phi = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A_i}$, com $c_1, \ldots, c_k \in\,]0, +\infty]$ e $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ dois a dois disjuntos e não vazios. Fixados $c_1', \ldots, c_k' > 0$ com $c_i' < c_i$, $i = 1, \ldots, k$, definimos:

$$A_i^n = \big\{x \in A_i : f_n(x) \ge c_i'\big\} = f_n^{-1}\big([c_i', +\infty]\big) \cap A_i \in \mathcal{A},$$

para todo $n \geq 1$. Para $n \geq 1$ fixado, os conjuntos A_i^n, $i = 1, \ldots, k$ são dois a dois disjuntos e:

$$f_n \geq \sum_{i=1}^{k} c_i' \chi_{A_i^n};$$

os Lemas 2.3.2 e 2.2.3 nos dão então:

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \sum_{i=1}^{k} c_i' \mu(A_i^n). \tag{2.3.3}$$

Note que para todo $x \in A_i$ temos $f(x) \geq \phi(x) = c_i > c_i'$ e portanto, como $f_n \nearrow f$, temos que $A_i^n \nearrow A_i$. O Lema 1.4.48 nos dá então:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_i^n) = \mu(A_i);$$

fazendo $n \to \infty$ em (2.3.3) obtemos (veja Exercício 1.5):

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \sum_{i=1}^{k} c_i' \mu(A_i). \tag{2.3.4}$$

Como a desigualdade (2.3.4) vale para quaisquer $c_i' \in \left]0, c_i\right[$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \sum_{i=1}^{k} c_{i,m}' \mu(A_i), \tag{2.3.5}$$

para todo $m \geq 1$, onde $(c_{i,m}')_{m\geq 1}$ é uma seqüência crescente (arbitrariamente escolhida) em $\left]0, c_i\right[$ que converge para c_i. Fazendo $m \to \infty$ em (2.3.5) obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(A_i) = \int_X \phi \, \mathrm{d}\mu,$$

o que prova (2.3.2) e completa a demonstração. □

2.3.4. LEMA. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função e seja $Y \in \mathcal{A}$. Suponha que $f|_Y$ é mensurável e não negativa (pelo Lema 2.1.31 isso equivale a dizer que $f\chi_Y$ é mensurável e não negativa). Então:*

$$\int_Y f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_Y \, \mathrm{d}\mu.$$

DEMONSTRAÇÃO. Pela Proposição 2.1.33 existe uma seqüência $(f_n)_{n\geq 1}$ de funções simples mensuráveis $f_n : X \to \left[0, +\infty\right[$ tal que $f_n \nearrow f\chi_Y$. Como cada f_n é simples o Lema 2.2.2 nos dá:

$$\int_Y f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_n \chi_Y \, \mathrm{d}\mu,$$

para todo $n \geq 1$. Obviamente $f_n|_Y \nearrow f|_Y$ e $(f_n\chi_Y) \nearrow (f\chi_Y)$. A conclusão segue portanto do Teorema 2.3.3 fazendo $n \to \infty$ na igualdade acima. □

2.3.5. Corolário. *Se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável então:*

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu,$$

para todo $Y \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Temos:

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_Y \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu,$$

onde na última desigualdade usamos o Lema 2.3.2. □

2.3.6. Lema. *Sejam $f : X \to [0, +\infty]$, $g : X \to [0, +\infty]$ funções mensuráveis. Então:*

$$\int_X (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu, \qquad \int_X cf \,\mathrm{d}\mu = c \int_X f \,\mathrm{d}\mu,$$

para qualquer $c \in [0, +\infty]$.

Demonstração. Pela Proposição 2.1.33 existem seqüências $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$ de funções simples mensuráveis $f_n : X \to [0, +\infty[$, $g_n : X \to [0, +\infty[$ tais que $f_n \nearrow f$ e $g_n \nearrow g$. Como as funções f_n e g_n são simples, os Lemas 2.2.4 e 2.2.8 nos dão:

$$\int_X (f_n + g_n) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu + \int_X g_n \,\mathrm{d}\mu, \qquad \int_X cf_n \,\mathrm{d}\mu = c \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Temos $(f_n + g_n) \nearrow (f + g)$ e $(cf_n) \nearrow (cf)$ (veja Lema 1.1.8 e Exercício 1.5). A conclusão segue portanto do Teorema 2.3.3 fazendo $n \to \infty$ nas igualdades acima. □

2.4. Definição da Integral: o Caso Geral

Ao longo de toda esta seção consideramos fixado um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dada uma função mensurável arbitrária $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ então, como vimos no Lema 2.1.21, temos $f = f^+ - f^-$, onde a parte positiva f^+ e a parte negativa f^- de f são funções mensuráveis não negativas definidas em X. Obviamente, se f já é não negativa então $f^+ = f$ e $f^- = 0$, de modo que $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu$. Em vista dessa observação, introduzimos a seguinte:

2.4.1. Definição. Diremos que uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é *quase integrável* quando f for mensurável e a diferença $\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu$ estiver bem-definida, ou seja, quando $\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ ou $\int_X f^- \,\mathrm{d}\mu < +\infty$; nesse caso, definimos a *integral* de f fazendo:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Quando f é quase integrável e $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$ (ou seja, se $\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ *e* $\int_X f^- \,\mathrm{d}\mu < +\infty$) então dizemos que a função f é *integrável*.

Como na Seção 2.3, introduzimos também a notação alternativa:

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

para a integral de f. Também, se $Y \in \mathcal{A}$ e se f é uma função a valores em $\overline{\mathbb{R}}$ cujo domínio contém Y então dizemos que f é *quase integrável em* Y (resp., *integrável em* Y) se a função $f|_Y$ for quase integrável (resp., integrável) com respeito à medida $\mu|_{(\mathcal{A}|_Y)}$; quando f for quase integrável em Y, a integral de $f|_Y$ com respeito à medida $\mu|_{(\mathcal{A}|_Y)}$ será denotada por:

$$\int_Y f\,\mathrm{d}\mu = \int_Y f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

2.4.2. Convenção. Seja $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^n$ e seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável; como sempre (recorde Convenções 2.1.3 e 2.1.11) assumimos que X é munido da σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_X$ constituída pelos subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ que estão contidos em X. Nesse contexto, a menos de menção explícita em contrário, quando usamos os adjetivos *quase integrável* e *integrável*, subentendemos que a σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_X$ é munida da (restrição da) medida de Lebesgue $\mathfrak{m} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to [0,+\infty]$. Quando for necessário enfatizar essa convenção, diremos também que f é *Lebesgue quase integrável* ou *Lebesgue integrável*, dependendo do caso.

2.4.3. Definição. Se $X \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^n$ e se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função quase integrável então a integral de f com respeito à (restrição à $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_X$) da medida de Lebesgue $\mathfrak{m}$ será chamada a *integral de Lebesgue* de f e será denotada (seguindo as notações anteriormente introduzidas) por $\int_X f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$ ou por $\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$.

2.4.4. Notação. Seja $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dados $a, b \in I$ com $a \le b$ então, se f for quase integrável no intervalo $[a,b]$, denotamos por:

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$$

a integral de Lebesgue de $f|_{[a,b]}$. Se $b < a$ e se f é quase integrável em $[b,a]$ então escrevemos:

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_b^a f.$$

Se $a \in I$, I é ilimitado à direita e f é quase integrável em $[a,+\infty[$ então denotamos por:

$$\int_a^{+\infty} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$$

a integral de Lebesgue de $f|_{[a,+\infty[}$; escrevemos também:

$$\int_{+\infty}^a f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_{+\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_a^{+\infty} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Similarmente, se $a \in I$, I é ilimitado à esquerda e f é quase integrável em $]-\infty, a]$ então denotamos por:

$$\int_{-\infty}^{a} f \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_{-\infty}^{a} f(x) \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$$

a integral de Lebesgue de $f|_{]-\infty,a]}$; escrevemos também:

$$\int_{a}^{-\infty} f \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_{a}^{-\infty} f(x) \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{-\infty}^{a} f \,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Claramente a restrição de f ao intervalo degenerado $[a, a] = \{a\}$ é uma função simples integrável e:

$$\int_{a}^{a} f \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = f^{+}(a)\mathfrak{m}\big(\{a\}\big) - f^{-}(a)\mathfrak{m}\big(\{a\}\big) = 0.$$

2.4.5. Lema. *Seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função e seja $Y \in \mathcal{A}$. Então $f|_Y$ é quase integrável se e somente se $f\chi_Y$ é quase integrável; nesse caso:*

$$\int_{Y} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{X} f\chi_Y \,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.1.31, temos que $f|_Y$ é mensurável se e somente se $f\chi_Y$ é mensurável. Além do mais, temos:

$$(f|_Y)^{+} = f^{+}|_Y, \quad (f|_Y)^{-} = f^{-}|_Y,$$
$$(f\chi_Y)^{+} = f^{+}\chi_Y, \quad (f\chi_Y)^{-} = f^{-}\chi_Y.$$

A conclusão segue então das igualdades acima e do Lema 2.3.4. □

2.4.6. Lema. *Sejam $f_1 : X \to [0, +\infty]$, $f_2 : X \to [0, +\infty]$ funções mensuráveis não negativas tais que a diferença $f = f_1 - f_2$ esteja bem-definida (i.e., não existe $x \in X$ com $f_1(x) = f_2(x) = +\infty$). Então existe uma função mensurável não negativa $h : X \to [0, +\infty]$ tal que $f_1 = f^{+} + h$ e $f_2 = f^{-} + h$.*

Demonstração. Observe em primeiro lugar que $f^{+} \le f_1$. De fato, se $f(x) \ge 0$ então $f^{+}(x) = f(x) = f_1(x) - f_2(x) \le f_1(x)$ e se $f(x) < 0$ então $f^{+}(x) = 0 \le f_1(x)$. Definimos h fazendo:

$$h(x) = \begin{cases} f_1(x) - f^{+}(x), & \text{se } x \in f^{-1}(\mathbb{R}), \\ f_2(x), & \text{se } x \in f^{-1}(+\infty), \\ f_1(x), & \text{se } x \in f^{-1}(-\infty). \end{cases}$$

Claramente h é não negativa; a mensurabilidade de h segue do Lema 2.1.13 e da Proposição 2.1.19. Verifiquemos que $f_1 = f^{+} + h$ e $f_2 = f^{-} + h$. Para $x \in f^{-1}(\mathbb{R})$, temos:

$$f^{+}(x) + h(x) = f^{+}(x) + f_1(x) - f^{+}(x) = f_1(x),$$
$$f^{-}(x) + h(x) = f^{-}(x) + f_1(x) - f^{+}(x) = f_1(x) - f(x) = f_2(x).$$

Se $x \in f^{-1}(+\infty)$ então:

$$f^+(x) + h(x) = +\infty = f_1(x), \quad f^-(x) + h(x) = h(x) = f_2(x);$$

finalmente, se $x \in f^{-1}(-\infty)$:

$$f^+(x) + h(x) = h(x) = f_1(x), \quad f^-(x) + h(x) = +\infty = f_2(x). \qquad \square$$

2.4.7. PROPOSIÇÃO. *Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções quase integráveis e seja $c \in \mathbb{R}$.*

(a) *Se as somas $\int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$ e $f+g$ estiverem bem-definidas então a função $f+g$ é quase integrável e $\int_X f+g \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.*
(b) *A função cf é quase integrável e $\int_X cf \,\mathrm{d}\mu = c \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos:

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-);$$

pelo Lema 2.4.6 existe uma função mensurável $h : X \to [0, +\infty]$ tal que:

$$f^+ + g^+ = (f+g)^+ + h, \quad f^- + g^- = (f+g)^- + h.$$

O Lema 2.3.6 nos dá:

$$\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X g^+ \,\mathrm{d}\mu = \int_X (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X h \,\mathrm{d}\mu, \tag{2.4.1}$$

$$\int_X f^- \,\mathrm{d}\mu + \int_X g^- \,\mathrm{d}\mu = \int_X (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu + \int_X h \,\mathrm{d}\mu. \tag{2.4.2}$$

Por definição temos:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu, \quad \int_X g \,\mathrm{d}\mu = \int_X g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X g^- \,\mathrm{d}\mu.$$

A quase integrabilidade das funções f e g juntamente com o fato que a soma $\int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$ está bem definida implicam que o lado esquerdo de pelo menos uma das igualdades (2.4.1) e (2.4.2) é finito. Isso implica que a integral de h é finita e que pelo menos uma das integrais $\int_X (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu$, $\int_X (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu$ é finita, i.e., $f+g$ é quase integrável. A demonstração do item (a) é obtida então subtraindo a igualdade (2.4.2) da igualdade (2.4.1).

Para demonstrar o item (b), consideramos primeiramente o caso que $c \ge 0$. Nesse caso, usando o Lema 2.3.6, temos:

$$\int_X (cf)^+ \,\mathrm{d}\mu = \int_X cf^+ \,\mathrm{d}\mu = c \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu,$$
$$\int_X (cf)^- \,\mathrm{d}\mu = \int_X cf^- \,\mathrm{d}\mu = c \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu.$$

Isso mostra que cf é quase integrável e $\int_X cf \, \mathrm{d}\mu = c \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Se $c < 0$ temos:

$$\int_X (cf)^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_X (-c) f^- \, \mathrm{d}\mu = (-c) \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu,$$
$$\int_X (cf)^- \, \mathrm{d}\mu = \int_X (-c) f^+ \, \mathrm{d}\mu = (-c) \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu,$$

o que completa a demonstração do item (b). □

2.4.8. Lema. *Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções quase integráveis. Se $f \le g$ então $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.*

Demonstração. Verifica-se facilmente que $f^+ \le g^+$ e $f^- \ge g^-$, donde, pelo Lema 2.3.2:

$$\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g^+ \, \mathrm{d}\mu, \quad \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu \ge \int_X g^- \, \mathrm{d}\mu.$$

A conclusão é obtida subtraindo as duas desigualdades acima. □

2.4.9. Lema. *Dada uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, temos:*

(a) *se f é quase integrável então $f|_Y$ também é quase integrável para todo $Y \in \mathcal{A}$;*
(b) *se $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{A}$ são conjuntos dois a dois disjuntos tais que $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$, $f|_{X_i}$ é quase integrável para $i = 1, \ldots, k$ e tais que a soma:*

$$\int_{X_1} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{X_2} f \, \mathrm{d}\mu + \cdots + \int_{X_k} f \, \mathrm{d}\mu \tag{2.4.3}$$

está bem definida então f é quase integrável e $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ é igual à soma (2.4.3).

Demonstração. Pelos Corolário 2.3.5 temos:

$$\int_Y f^+ \, \mathrm{d}\mu \le \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu, \quad \int_Y f^- \, \mathrm{d}\mu \le \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

o que prova o item (a). Passemos à prova do item (b). Temos:

$$f = f\chi_{X_1} + f\chi_{X_2} + \cdots + f\chi_{X_k}.$$

Pelo Lema 2.4.5, as funções $f\chi_{X_i}$ são quase integráveis e:

$$\int_{X_i} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_{X_i} \, \mathrm{d}\mu,$$

para $i = 1, \ldots, k$. A conclusão segue da Proposição 2.4.7. □

2.4.10. Lema. *Se $\mu(X) = 0$ então $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$ para toda função mensurável $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $\phi : X \to [0, +\infty]$ é uma função simples mensurável então $\int_X \phi \, \mathrm{d}\mu = 0$, já que $\mu\big(\phi^{-1}(c)\big) = 0$, para todo $c \in \mathrm{Im}(\phi)$. Daí, se f é não negativa então $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$, já que $\int_X \phi \, \mathrm{d}\mu = 0$ para toda função simples mensurável não negativa $\phi \le f$. Finalmente, se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável arbitrária então $\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu = 0$ e portanto $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$. □

2.4.11. COROLÁRIO. *Se $X' \in \mathcal{A}$ é tal que $\mu(X \setminus X') = 0$ então uma função mensurável $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é quase integrável se e somente se $f|_{X'}$ é quase integrável e nesse caso $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_{X'} f \, \mathrm{d}\mu$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Lema 2.4.10 temos $\int_{X \setminus X'} f \, \mathrm{d}\mu = 0$. A conclusão segue do Lema 2.4.9, já que:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_{X'} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{X \setminus X'} f \, \mathrm{d}\mu.$$ □

A seguinte terminologia é extremamente conveniente:

2.4.12. DEFINIÇÃO. Dizemos que uma propriedade $\mathbb{P}$ referente a pontos do espaço de medida X é válida *quase sempre* (ou em *quase todo ponto* de X) se existe um conjunto $X' \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(X \setminus X') = 0$ e tal que a propriedade $\mathbb{P}$ é válida em todos os pontos de X'. Dizemos também que a propriedade $\mathbb{P}$ é satisfeita q. s. (ou μ-q. s.).

2.4.13. COROLÁRIO. *Sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções mensuráveis. Se $f = g$ quase sempre então f é quase integrável se e somente se g é quase integrável e, nesse caso, $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.*

DEMONSTRAÇÃO. Por hipótese existe $X' \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(X \setminus X') = 0$ e $f|_{X'} = g|_{X'}$. A conclusão segue do Corolário 2.4.11, já que:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_{X'} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{X'} g \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$ □

2.5. Teoremas de Convergência

No que segue, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ denota sempre um espaço de medida.

2.5.1. TEOREMA (da convergência monotônica). *Seja $(f_n)_{n \ge 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Suponha que f_1 é quase integrável. Então:*

(a) *se $\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu > -\infty$ e $f_n \nearrow f$ q. s. então f e f_n são quase integráveis para todo $n \ge 1$ e $\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$;*
(b) *se $\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ e $f_n \searrow f$ q. s. então f e f_n são quase integráveis para todo $n \ge 1$ e $\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.*

DEMONSTRAÇÃO. É suficiente provar o item (a), já que o item (b) segue do item (a) trocando f_n por $-f_n$ e f por $-f$. Em primeiro lugar, como $\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu > -\infty$, segue do resultado do Exercício 2.19 que $f_1 > -\infty$ quase sempre; existe portanto um subconjunto mensurável X' de X com complementar de medida nula tal que $f_1(x) > -\infty$ e $f_n(x) \nearrow f(x)$, para todo $x \in X'$. Em vista do Corolário 2.4.11, é suficiente mostrar a tese do teorema para as restrições a X' das funções em questão. Para cada $n \geq 1$, defina $g_n : X' \to [0, +\infty]$ fazendo $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$, se $f_1(x) < +\infty$ e $g_n(x) = 0$, se $f_1(x) = +\infty$; daí g_n é mensurável e $f_n = g_n + f_1$. De modo análogo, definimos $g : X' \to [0, +\infty]$ mensurável com $f = g + f_1$. Daí $g_n \nearrow g$ e portanto o Teorema 2.3.3 nos dá:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X'} g_n \,\mathrm{d}\mu = \int_{X'} g \,\mathrm{d}\mu. \tag{2.5.1}$$

Note que como $\int_{X'} f_1 \,\mathrm{d}\mu > -\infty$ e $\int_{X'} g_n \,\mathrm{d}\mu \geq 0$, o item (a) da Proposição 2.4.7 nos diz que $f_n = g_n + f_1$ é quase integrável e:

$$\int_{X'} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_{X'} g_n \,\mathrm{d}\mu + \int_{X'} f_1 \,\mathrm{d}\mu; \tag{2.5.2}$$

similarmente, f é quase integrável e $\int_{X'} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{X'} g \,\mathrm{d}\mu + \int_{X'} f_1 \,\mathrm{d}\mu$. A conclusão é obtida agora fazendo $n \to \infty$ em (2.5.2) e usando (2.5.1). □

2.5.2. Proposição (Lema de Fatou). *Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Então:*

(a) *se existe uma função quase integrável $\phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f_n \geq \phi$ q. s. para todo $n \geq 1$ e $\int_X \phi \,\mathrm{d}\mu > -\infty$ então f_n é quase integrável para todo $n \geq 1$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ é quase integrável e:*
$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu;$$

(b) *se existe uma função quase integrável $\phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f_n \leq \phi$ q. s. para todo $n \geq 1$ e $\int_X \phi \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ então f_n é quase integrável para todo $n \geq 1$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ é quase integrável e:*
$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. É suficiente mostrar o item (a), já que o item (b) segue do item (a) trocando f_n por $-f_n$ e ϕ por $-\phi$. Em primeiro lugar, a quase integrabilidade das funções f_n segue do resultado do Exercício 2.20. Para cada $n \geq 1$ seja $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Daí $g_n \geq \phi$ q. s., de modo que g_n é quase integrável e $\int_X g_n \,\mathrm{d}\mu > -\infty$; além do mais, $g_n \leq f_k$ para todo $k \geq n$ e portanto:

$$\int_X g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

Claramente $g_n \nearrow (\liminf_{k\to\infty} f_k)$ e portanto a conclusão segue do item (a) do Teorema 2.5.1, fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima. □

2.5.3. Notação. Se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de funções $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função então escrevemos $f_n \to f$ quando $(f_n)_{n\geq 1}$ convergir para f *pontualmente*, i.e., $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida, escrevemos $f_n \to f$ q. s. quando a seqüência $(f_n)_{n\ge1}$ converge para f *pontualmente quase sempre*, i.e., se existe $X' \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(X\setminus X') = 0$ e tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X'$.

2.5.4. Teorema (da convergência dominada). *Seja $(f_n)_{n\ge1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f_n \to f$ q. s., onde $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável. Se existe uma função integrável $\phi : X \to [0,+\infty]$ tal que $|f_n| \le \phi$ q. s. para todo $n \ge 1$ então f_n é integrável para todo $n \ge 1$, f é integrável e:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Demonstração. A integrabilidade das funções f_n, f segue das desigualdades $|f_n| \le \phi$ q. s. e $|f| \le \phi$ q. s. e do resultado do Exercício 2.20. Como $-\phi \le f_n \le \phi$ q. s. para todo $n \ge 1$ e $\int_X \phi\,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, estamos dentro das hipóteses de ambos os itens da Proposição 2.5.2 e portanto:

$$\begin{aligned}\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \le \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \\ \le \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Logo $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$. □

2.5.5. Proposição. *Sejam Y um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de Y e $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função tal que:*

- *para todo $y \in Y$, a função $X \ni x \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ é integrável;*
- *para todo $x \in X$ o limite $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ existe em $\mathbb{R}$;*
- *existe uma função integrável $\phi : X \to \mathbb{R}$ e uma vizinhança V de y_0 em $\mathbb{R}^n$ tal que $|f(x,y)| \le \phi(x)$, para todo $x \in X$ e todo $y \in V \cap Y$ com $y \ne y_0$.*

Então, a função $X \ni x \mapsto \lim_{y\to y_0} f(x,y) \in \mathbb{R}$ é integrável, o limite $\lim_{y\to y_0}\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ existe e:

$$\lim_{y\to y_0}\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Demonstração. Considere a aplicação $g : Y \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(y) = \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

para todo $y \in Y$ e a aplicação $h : X \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y),$$

para todo $x \in X$. Devemos mostrar que h é integrável e que o limite $\lim_{y\to y_0} g(y)$ existe e é igual à integral de h. Seja $(y_n)_{n\ge1}$ uma seqüência em Y com $y_n \ne y_0$ para todo $n \ge 1$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Para cada $n \ge 1$, considere a função $f_n : X \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = f(x,y_n)$, para todo

$x \in X$. Temos que f_n é integrável, para todo $n \geq 1$ e que $f_n \to h$. Para n suficientemente grande temos $y_n \in V$ e portanto $|f_n| \leq \phi$. Segue do Teorema 2.5.4 que h é integrável e que:

$$\int_X h \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} g(y_n).$$

Como $(y_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência arbitrária em $Y \setminus \{y_0\}$ convergindo para y_0, segue que $\lim_{y\to y_0} g(y) = \int_X h \,\mathrm{d}\mu$. $\square$

2.5.6. COROLÁRIO. *Seja Y um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y_0 um ponto de Y e $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função tal que:*

- *para todo $y \in Y$, a função $X \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ é integrável;*
- *para todo $x \in X$, a função $Y \ni y \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ é contínua no ponto y_0;*
- *existe uma função integrável $\phi : X \to \mathbb{R}$ e uma vizinhança V de y_0 em $\mathbb{R}^n$ tal que $|f(x, y)| \leq \phi(x)$, para todo $x \in X$ e todo $y \in V \cap Y$ com $y \neq y_0$.*

Então, a função $Y \ni y \mapsto \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) \in \mathbb{R}$ é contínua no ponto y_0.

DEMONSTRAÇÃO. Se y_0 é um ponto isolado de Y então não há nada para ser mostrado, já que toda função é contínua em pontos isolados de seu domínio. Se y_0 é um ponto de acumulação de Y, a Proposição 2.5.5 nos dá:

$$\lim_{y\to y_0} \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \lim_{y\to y_0} f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x, y_0) \,\mathrm{d}\mu(x),$$

o que completa a demonstração. $\square$

2.5.7. PROPOSIÇÃO. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo com mais de um ponto, y_0 um ponto de I e $f : X \times I \to \mathbb{R}$ uma função tal que:*

- *para todo $y \in I$, a função $X \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ é integrável;*
- *para todo $x \in X$, a função $I \ni y \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ é derivável;*
- *existe uma função integrável $\phi : X \to \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ tal que:*

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Big| \leq \phi(x),$$

para todo $x \in X$ e todo $y \in I \cap \,]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ com $y \neq y_0$.

Então a função $I \ni y \mapsto \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) \in \mathbb{R}$ é derivável no ponto y_0, a função $X \ni x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \in \mathbb{R}$ é integrável e:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=y_0} \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

DEMONSTRAÇÃO. Considere a função $g : I \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x, y) = \int_X f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x),$$

para todo $y \in I$. Dado $h \neq 0$ com $y_0 + h \in I$ então:

$$\frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} = \int_X \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} \, \mathrm{d}\mu(x). \tag{2.5.3}$$

Obviamente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0), \tag{2.5.4}$$

para todo $x \in X$. Se $h \neq 0$, $y_0 + h \in I$ e $|h| \leq \varepsilon$ então o Teorema do Valor Médio nos dá:

$$\Big|\frac{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)}{h}\Big| = \Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta h)\Big| \leq \phi(x), \tag{2.5.5}$$

onde $\theta \in \,]0, 1[$. A conclusão segue da Proposição 2.5.5 e de (2.5.4) e (2.5.5), fazendo $h \to 0$ em (2.5.3). □

2.6. Riemann x Lebesgue

No que segue usaremos sistematicamente a terminologia e notação introduzidas nas Definições 1.3.1 e 1.3.2. Introduzimos mais alguma terminologia sobre partições e blocos.

2.6.1. Definição. Seja B um bloco retangular n-dimensional tal que $|B| > 0$ e seja $P = (P_1, \ldots, P_n)$ uma partição do bloco B. Uma partição $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ de B é dita um *refinamento* de P se $Q_i \supset P_i$, para $i = 1, \ldots, n$. A *norma* da partição P, denotada por $\|P\|$, é definida como o máximo dos diâmetros dos sub-blocos de B determinados por P.

Claramente se uma partição Q refina uma partição P então todo sub-bloco de B determinado por Q está contido em algum sub-bloco de B determinado por P.

No que segue, consideramos fixado um bloco retangular n-dimensional B com $|B| > 0$ e uma função limitada $f : B \to \mathbb{R}$.

2.6.2. Definição. Se P é uma partição de B então a *soma inferior de Riemann* de f com respeito a P é definida por:

$$s(f; P) = \sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P}} \inf f(\mathfrak{b}) \, |\mathfrak{b}|,$$

e a *soma superior de Riemann* de f com respeito a P é definida por:

$$S(f; P) = \sum_{\mathfrak{b} \in \overline{P}} \sup f(\mathfrak{b}) \, |\mathfrak{b}|.$$

Obviamente:

$$s(f; P) \leq S(f; P), \tag{2.6.1}$$

para toda partição P de B.

Nós consideramos as seguintes funções $m_P : B \to \mathbb{R}$, $M_P : B \to \mathbb{R}$ associadas a uma partição P de B:

$$m_P = \sum_{\mathfrak{b}\in\overline{P}} \inf f(\mathfrak{b})\, \chi_{\mathrm{int}(\mathfrak{b})}, \quad M_P = \sum_{\mathfrak{b}\in\overline{P}} \sup f(\mathfrak{b})\, \chi_{\mathrm{int}(\mathfrak{b})}.$$

Mais explicitamente, dado $x \in B$, se x pertence ao interior de algum sub-bloco $\mathfrak{b}$ de B determinado por P então o valor da função m_P (resp., da função M_P) no ponto x é igual ao ínfimo (resp., o supremo) de f no bloco $\mathfrak{b}$; se x pertence à fronteira de algum sub-bloco de B determinado por P então $m_P(x) = M_P(x) = 0$. Obviamente m_P e M_P são funções simples Lebesgue integráveis e:

$$\int_B m_P \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = s(f;P), \quad \int_B M_P \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = S(f;P), \tag{2.6.2}$$

já que $\mathfrak{m}\big(\mathrm{int}(\mathfrak{b})\big) = \mathfrak{m}(\mathfrak{b}) = |\mathfrak{b}|$, para todo $\mathfrak{b} \in \overline{P}$ (vide Corolário 1.4.8). Temos:

$$\inf f(B) \le m_P(x) \le f(x) \le M_P(x) \le \sup f(B), \quad \text{para todo } x \in \bigcup_{\mathfrak{b}\in\overline{P}} \mathrm{int}(\mathfrak{b}); \tag{2.6.3}$$

como a união das fronteiras dos blocos $\mathfrak{b} \in \overline{P}$ tem medida nula, segue que as desigualdades em (2.6.3) valem para quase todo $x \in B$. Se Q é uma partição de B que refina P então afirmamos que:

$$m_P(x) \le m_Q(x), \quad M_Q(x) \le M_P(x), \quad \text{para todo } x \in \bigcup_{\mathfrak{b}\in\overline{Q}} \mathrm{int}(\mathfrak{b}); \tag{2.6.4}$$

de fato, se $x \in \mathrm{int}(\mathfrak{b})$, para algum bloco $\mathfrak{b} \in \overline{Q}$ então $\mathfrak{b}$ está contido em algum bloco $\mathfrak{b}' \in \overline{P}$, donde $\mathrm{int}(\mathfrak{b}) \subset \mathrm{int}(\mathfrak{b}')$ e portanto:

$$m_P(x) = \inf f(\mathfrak{b}') \le \inf f(\mathfrak{b}) = m_Q(x),$$
$$M_Q(x) = \sup f(\mathfrak{b}) \le \sup f(\mathfrak{b}') = M_P(x).$$

2.6.3. Lema. *Dadas partições P e Q de B, se Q refina P então:*

$$s(f;P) \le s(f;Q), \quad S(f;Q) \le S(f;P).$$

Demonstração. Note que as desigualdades em (2.6.4) valem para quase todo $x \in B$. Basta então usar integração e as igualdades (2.6.2). □

2.6.4. Corolário. *Para quaisquer partições P e Q de B temos:*

$$s(f;P) \le S(f;Q).$$

Demonstração. Se $P = (P_1, \ldots, P_n)$ e $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$, denotamos por $P \cup Q$ a partição de B dada por $P \cup Q = (P_1 \cup Q_1, \ldots, P_n \cup Q_n)$; daí $P \cup Q$ refina tanto P como Q. Usando o Lema 2.6.3 e a desigualdade (2.6.1) obtemos:

$$s(f;P) \le s(f;P \cup Q) \le S(f;P \cup Q) \le S(f;Q). \qquad \square$$

2.6.5. Definição. A *integral inferior de Riemann* e a *integral superior de Riemann* de uma função limitada $f : B \to \mathbb{R}$ são definidas respectivamente por:

$$
\begin{aligned}
{\scriptstyle(R)}\underline{\int} f &= \sup\big\{s(f;P) : P \text{ partição de } B\big\},\\
{\scriptstyle(R)}\overline{\int} f &= \inf\big\{S(f;P) : P \text{ partição de } B\big\}.
\end{aligned}
$$

Quando a integral inferior e a integral superior de f coincidem dizemos que f é *Riemann integrável* e nesse caso a *integral de Riemann* de f é definida por:

$$
{\scriptstyle(R)}\int f = {\scriptstyle(R)}\underline{\int} f = {\scriptstyle(R)}\overline{\int} f.
$$

Note que o Corolário 2.6.4 implica que:

$$
{\scriptstyle(R)}\underline{\int} f \le {\scriptstyle(R)}\overline{\int} f.
$$

Vamos agora determinar condições necessárias e suficientes para que uma função f seja Riemann integrável e vamos comparar a integral de Riemann de f com a integral de Lebesgue de f.

Consideraremos as funções $m : B \to \mathbb{R}$, $M : B \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$
m(x) = \sup_{\delta>0} \inf_{\substack{y\in B\\ d(y,x)<\delta}} f(y), \qquad M(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{\substack{y\in B\\ d(y,x)<\delta}} f(y),
$$

para todo $x \in B$. Claramente:

$$
\inf f(B) \le m(x) \le f(x) \le M(x) \le \sup f(B), \tag{2.6.5}
$$

para todo $x \in B$.

Temos o seguinte:

2.6.6. Lema. *Dado $x \in B$ então $m(x) = M(x)$ se e somente se f é contínua no ponto x.*

Demonstração. Suponha que f é contínua no ponto x. Dado $\varepsilon > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon$, para todo $y \in B$ com $d(y,x) < \delta$. Daí:

$$
\inf_{\substack{y\in B\\ d(y,x)<\delta}} f(y) \ge f(x) - \varepsilon, \qquad \sup_{\substack{y\in B\\ d(y,x)<\delta}} f(y) \le f(x) + \varepsilon,
$$

e portanto:

$$
f(x) - \varepsilon \le m(x) \le M(x) \le f(x) + \varepsilon.
$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $m(x) = M(x)$. Reciprocamente, suponha que $m(x) = M(x)$; daí, por (2.6.5), temos $m(x) = f(x) = M(x)$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que:

$$
\inf_{\substack{y\in B\\ d(y,x)<\delta_1}} f(y) > f(x) - \varepsilon, \qquad \sup_{\substack{y\in B\\ d(y,x)<\delta_2}} f(y) < f(x) + \varepsilon.
$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$; daí, para todo $y \in B$ com $d(y,x) < \delta$, temos:

$$f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon,$$

o que prova que f é contínua no ponto x. $\square$

Se P é uma partição de B, observamos que:

$$(2.6.6) \qquad m_P(x) \le m(x), \quad M(x) \le M_P(x), \quad \text{para todo } x \in \bigcup_{\mathfrak{b} \in \overline{P}} \operatorname{int}(\mathfrak{b});$$

de fato, basta observar que se x pertence ao interior de um bloco $\mathfrak{b} \in \overline{P}$ então existe $\delta > 0$ tal que a bola de centro x e raio δ está contida em $\mathfrak{b}$ e portanto:

$$m_P(x) = \inf_{y \in \mathfrak{b}} f(y) \le \inf_{\substack{y \in B \\ d(y,x) < \delta}} f(y) \le m(x),$$

$$M(x) \le \sup_{\substack{y \in B \\ d(y,x) < \delta}} f(y) \le \sup_{y \in \mathfrak{b}} f(y) = M_P(x).$$

Além do mais, temos o seguinte:

2.6.7. Lema. *Se $(P_k)_{k \ge 1}$ é uma seqüência de partições do bloco retangular B tal que $\|P_k\| \to 0$ então $m_{P_k} \to m$ q. s. e $M_{P_k} \to M$ q. s..*

Demonstração. Seja A a união das fronteiras de todos os sub-blocos de B determinados por todas as partições P_k; como a quantidade de blocos em questão é enumerável, temos que A tem medida nula. Seja $x \in B$, $x \notin A$; vamos mostrar que $m_{P_k}(x) \to m(x)$ e $M_{P_k}(x) \to M(x)$. Seja dado $\varepsilon > 0$. Temos que existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que:

$$\inf_{\substack{y \in B \\ d(y,x) < \delta_1}} f(y) > m(x) - \varepsilon, \qquad \sup_{\substack{y \in B \\ d(y,x) < \delta_2}} f(y) < M(x) + \varepsilon.$$

Seja k_0 tal que $\|P_k\| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para todo $k \ge k_0$. Vamos mostrar que:

$$(2.6.7) \qquad m_{P_k}(x) > m(x) - \varepsilon, \quad M_{P_k}(x) < M(x) + \varepsilon,$$

para todo $k \ge k_0$. Fixado $k \ge k_0$, seja $\mathfrak{b} \in \overline{P_k}$ tal que x pertence ao interior de $\mathfrak{b}$. Como o diâmetro de $\mathfrak{b}$ é menor que $\min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $\mathfrak{b}$ está contido na bola de centro x e raio δ_1 e na bola de centro x e raio δ_2, de modo que:

$$m_{P_k}(x) = \inf_{y \in \mathfrak{b}} f(y) \ge \inf_{\substack{y \in B \\ d(y,x) < \delta_1}} f(y) > m(x) - \varepsilon,$$

$$M_{P_k}(x) = \sup_{y \in \mathfrak{b}} f(y) \le \sup_{\substack{y \in B \\ d(y,x) < \delta_2}} f(y) < M(x) + \varepsilon,$$

provando (2.6.7). Usando (2.6.6) e (2.6.7) concluímos agora que:

$$m(x) - \varepsilon < m_{P_k}(x) \le m(x), \quad M(x) \le M_{P_k}(x) < M(x) + \varepsilon,$$

o que completa a demonstração. $\square$

2.6.8. COROLÁRIO. *As funções m e M são Lebesgue integráveis e:*

$$\int_B m \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = {}^{(R)}\!\!\int_{-} f, \qquad \int_B M \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = {}^{(R)}\!\!\int^{-} f.$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Lema 2.6.7 e do resultado do item (c) do Exercício 2.8 que as funções m e M são mensuráveis. Seja agora $(P_k)_{k\ge1}$ uma seqüência de partições de B tal que:

$$\lim_{k\to\infty} s(f; P_k) = {}^{(R)}\!\!\int_{-} f. \tag{2.6.8}$$

Podemos refinar cada partição P_k de modo que $\|P_k\| \to 0$; o Lema 2.6.3 garante que a condição (2.6.8) continua satisfeita. Como o bloco B tem medida finita, qualquer função constante finita definida em B é integrável; logo, as desigualdades em (2.6.3) implicam que a seqüência de funções $(m_{P_k})_{k\ge1}$ satisfaz as hipótese do Teorema da Convergência Dominada. Usando o Lema 2.6.7 e as identidades (2.6.2) obtemos então:

$$\lim_{k\to\infty} s(f; P_k) = \lim_{k\to\infty} \int_B m_{P_k} \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_B m \, \mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

De modo totalmente análogo, mostra-se que a integral de Lebesgue de M é igual à integral superior de Riemann de f. □

Estamos em condições agora de provar o resultado principal desta seção.

2.6.9. PROPOSIÇÃO. *Seja B um bloco retangular n-dimensional com $|B| > 0$ e seja $f : B \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então:*

(a) *f é Riemann integrável se e somente se o conjunto das descontinuidades de f tem medida nula;*
(b) *se f é Riemann integrável então f é Lebesgue integrável e:*

$$\int_B f \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = {}^{(R)}\!\!\int f.$$

DEMONSTRAÇÃO. Em vista do Corolário 2.6.8, f é Riemann integrável se e somente se:

$$\int_B m \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_B M \, \mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Como $m \le M$, o resultado do Exercício 2.22 implica que f é Riemann integrável se e somente se $M = m$ quase sempre. O item (a) segue portanto do Lema 2.6.6. Passemos à demonstraçao do item (b). Suponha que f é Riemann integrável. Então $M = m$ quase sempre e de (2.6.5) segue que $m = f = M$ quase sempre. O resultado do item (b) do Exercício 2.8 implica então que f é mensurável; além do mais:

$$\int_B f \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_B m \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = {}^{(R)}\!\!\int_{-} f = {}^{(R)}\!\!\int f.$$ □

2.6.1. A integral imprópria de Riemann. Na Definição 2.6.5 introduzimos a noção de integral de Riemann para funções limitadas definidas em blocos retangulares. A noção de integral de Riemann pode ser estendida para contextos mais gerais, envolvendo funções não limitadas definidas em domínios não limitados. Tais extensões são normalmente conhecidas como *integrais impróprias de Riemann* e são definidas através de limites de integrais próprias (i.e., integrais de funções limitadas em conjuntos limitados).

2.6.10. NOTAÇÃO. Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo com $a < b$. Se f é uma função a valores reais definida num conjunto que contém $[a,b]$ e se $f|_{[a,b]}$ é limitada e Riemann integrável então a integral de Riemann de $f|_{[a,b]}$ será denotada por:

$$(R)\!\int_a^b f.$$

2.6.11. DEFINIÇÃO. Seja $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função tal que para todo $u \in\,]a,+\infty[$, a restrição de f ao intervalo $[a,u]$ é limitada e Riemann integrável. A *integral imprópria de Riemann* de f é definida por:

$$(R)\!\int_a^{+\infty} f = \lim_{u\to\infty} (R)\!\int_a^u f,$$

desde que o limite acima exista em $\overline{\mathbb{R}}$. Quando esse limite é finito, dizemos que a integral imprópria de f é *convergente*.

2.6.12. PROPOSIÇÃO. *Seja $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função tal que para todo $u \in\,]a,+\infty[$, a restrição de f ao intervalo $[a,u]$ é limitada e Riemann integrável. Então f é mensurável. Além do mais, se f é Lebesgue quase integrável então a integral imprópria de Riemann de f existe em $\overline{\mathbb{R}}$ e:*

$$(R)\!\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} f \,\mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{2.6.9}$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(u_n)_{n\ge1}$ uma seqüência arbitrária em $]a,+\infty[$ tal que $u_n \to +\infty$. Pela Proposição 2.6.9, a restrição de f ao intervalo $[a,u_n]$ é Lebesgue integrável e:

$$\int_a^{u_n} f \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = (R)\!\int_a^{u_n} f, \tag{2.6.10}$$

para todo $n \ge 1$. Obviamente:

$$\lim_{n\to\infty} f\chi_{[a,u_n]} = f;$$

como $f\chi_{[a,u_n]}$ é mensurável para todo $n \ge 1$, concluímos que f é mensurável. Em vista de (2.6.10), para mostrar (2.6.9), é suficiente mostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{u_n} f \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_a^{+\infty} f \,\mathrm{d}\mathfrak{m}, \tag{2.6.11}$$

para toda seqüência $(u_n)_{n\ge1}$ em $]a,+\infty[$ com $u_n \to +\infty$. Verifiquemos (2.6.11) primeiramente no caso em que f é não negativa. Pelo Lema de

Fatou, temos:

$$\int_a^{+\infty} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_a^{+\infty} \liminf_{n\to\infty} f\chi_{[a,u_n]}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} f\chi_{[a,u_n]}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$$
$$= \liminf_{n\to\infty} \int_a^{u_n} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Por outro lado, $\int_a^{u_n} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \le \int_a^{+\infty} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}$ para todo $n \ge 1$, donde:

$$\int_a^{+\infty} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^{u_n} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \le \limsup_{n\to\infty} \int_a^{u_n} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \le \int_a^{+\infty} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m},$$

provando (2.6.11) no caso $f \ge 0$. Em geral, se $f : [a,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ é uma função quase integrável qualquer então (2.6.11) é satisfeita para f^+ e f^-, ou seja:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{u_n} f^+\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_a^{+\infty} f^+\,\mathrm{d}\mathfrak{m}, \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^{u_n} f^-\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_a^{+\infty} f^-\,\mathrm{d}\mathfrak{m};$$

a conclusão é obtida subtraindo as duas igualdades acima. □

Resultados análogos aos da Proposição 2.6.12 podem ser mostrados para outros tipos de integrais impróprias de Riemann (por exemplo, integrais de funções ilimitadas em intervalos limitados). O passo central da demonstração de tais resultados é dado pelo resultado do Exercício 2.29. Note, por exemplo, que o resultado desse exercício pode ser usado para justificar a igualdade (2.6.11) na demonstração da Proposição 2.6.12.

2.6.13. Exemplo. É possível que uma função $f : [a,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ admita uma integral imprópria de Riemann convergente mas não seja Lebesgue quase integrável. Considere a função $f : [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

para $x > 0$ e $f(0) = 1$. Temos que f é contínua e portanto $f|_{[0,u]}$ é limitada e Riemann integrável para todo $u \in\ ]0,+\infty[$. Temos que f se anula nos pontos $k\pi$, com k inteiro positivo, f é positiva nos intervalos da forma $]k\pi,(k+1)\pi[$ com k inteiro positivo par e f é negativa nos intervalos da forma $]k\pi,(k+1)\pi[$ com k inteiro positivo ímpar. Para cada inteiro $k \ge 0$, seja:

$$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f|\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \ge 0.$$

Em vista do resultado do Exercício 2.14 temos:

$$\int_0^{+\infty} f^+\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ par}}}^{\infty} a_k, \quad \int_0^{+\infty} f^-\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ímpar}}}^{\infty} a_k. \tag{2.6.12}$$

Além do mais:

$$\int_0^{n\pi} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k,$$

e portanto:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k.$$

Façamos algumas estimativas sobre os números a_k. Para $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, temos $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \le \frac{1}{k\pi}$ e portanto:

$$a_k \le \frac{1}{k\pi}\big((k+1)\pi - k\pi\big) = \frac{1}{k},$$

para todo $k \ge 1$. Segue que $a_k \to 0$. Vamos mostrar que a seqüência $(a_k)_{k\ge 0}$ é decrescente. Temos:

$$\begin{aligned} a_{k+1} = \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{x+\pi}\right| \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\ &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x+\pi}\right| \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \le \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = a_k; \end{aligned}$$

a segunda igualdade acima pode ser justificada fazendo a mudança de variável $y = x - \pi$ na integral de Riemann ${}^{(R)}\!\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \mathrm{d}x$ ou utilizando o resultado do Exercício 2.16 e o fato que a função $x \mapsto x + \pi$ preserva medida (veja Lema 1.4.10 e Definição 2.1). Como a seqüência $(a_k)_{k\ge 0}$ é decrescente e tende a zero, segue do critério de Dirichlet (ou critério da série alternada) que a série $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ converge; defina:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = L \in \mathbb{R}.$$

Vamos mostrar agora que:

$$\lim_{u\to+\infty}\int_0^u f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = L. \tag{2.6.13}$$

Dado $\varepsilon > 0$, temos que existe n_0 tal que:

$$\Big|L - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n \ge n_0$. Podemos escolher n_0 também de modo que:

$$a_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n \ge n_0$. Dado $u \in \mathbb{R}$, $u \ge n_0\pi$, seja $n \ge n_0$ o maior inteiro tal que $n\pi \le u$; daí $n\pi \le u < (n+1)\pi$ e:

$$\int_0^u f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_0^{(n+1)\pi} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} - \int_u^{(n+1)\pi} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k - \int_u^{(n+1)\pi} f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Daí:

$$\begin{aligned}\Big|L - \int_0^u f \, \mathrm{d}\mathfrak{m}\Big| &\le \Big|L - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k\Big| + \Big|\int_u^{(n+1)\pi} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m}\Big| \\ &\le \Big|L - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k\Big| + a_n < \varepsilon,\end{aligned}$$

para todo $u \ge n_0\pi$. Isso prova (2.6.13). Concluímos então que:

$$\text{(R)}\int_0^{+\infty} f = L \in \mathbb{R}.$$

Vamos agora mostrar que f não é Lebesgue quase integrável. Para isso, fazemos uma estimativa inferior para os números a_k. Dado um inteiro $k \ge 0$ então, para $k\pi + \frac{\pi}{4} \le x \le (k+1)\pi - \frac{\pi}{4}$ temos:

$$|\operatorname{sen} x| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \Big|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{(k+1)\pi},$$

e portanto:

$$a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f| \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \ge \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi-\frac{\pi}{4}} \Big|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big| \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{(k+1)\pi}\,\frac{\pi}{2}.$$

Segue que as séries em (2.6.12) são divergentes e portanto:

$$\int_0^{+\infty} f^+ \, \mathrm{d}\mathfrak{m} = +\infty = \int_0^{+\infty} f^- \, \mathrm{d}\mathfrak{m}.$$

Logo f não é Lebesgue quase integrável.

No Exercício 2.32 pedimos ao leitor para computar explicitamente o valor da integral imprópria de Riemann $\text{(R)}\int_0^{+\infty} f$ da função f do Exemplo 2.6.13.

2.7. Mais sobre Convergência de Seqüências de Funções

Recorde que, dado um conjunto X, uma seqüência $(f_n)_{n\ge1}$ de funções $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, dizemos que $(f_n)_{n\ge1}$ *converge pontualmente* para f e escrevemos $f_n \to f$ quando $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$. Se as funções f_n e f tomam valores em $\mathbb{R}$, isso significa que para todo $x \in X$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \ge 1$ (possivelmente dependendo de x) tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $n \ge n_0$; dizemos que $(f_n)_{n\ge1}$ *converge uniformemente* para f e escrevemos $f_n \xrightarrow{\mathrm{u}} f$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \ge 1$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $n \ge n_0$ e todo $x \in X$. Alternativamente, temos que $(f_n)_{n\ge1}$ converge uniformemente para f se:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \big|f_n(x) - f(x)\big| = 0.$$

Obviamente convergência uniforme implica em convergência pontual.

Em teoria da medida, estamos em geral mais interessados em conceitos que desprezem tudo aquilo que ocorre em conjuntos de medida nula. Recorde que se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida e se $(f_n)_{n\ge1}$ é uma seqüência de funções $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, então dizemos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge para $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *pontualmente quase sempre* e escrevemos $f_n \to f$ q. s. quando existe $X' \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(X \setminus X') = 0$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X'$. Precisamos agora de uma versão da noção de convergência uniforme que ignore conjuntos de medida nula. Temos a seguinte:

2.7.1. Definição. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge para f *uniformemente quase sempre* e escrevemos $f_n \xrightarrow{\text{u}} f$ q. s. se existe $X' \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(X \setminus X') = 0$ e tal que $f_n|_{X'} \xrightarrow{\text{u}} f|_{X'}$.

Evidentemente, convergência uniforme quase sempre implica em convergência pontual quase sempre.

2.7.2. Exemplo. Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida nula e seja $(f_n)_{n\geq 1}$ a seqüência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n = \chi_{A_n}$, para todo $n \geq 1$. Temos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente quase sempre para a função nula. De fato, tomando $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ então A tem medida nula e todas as funções f_n são identicamente nulas no complementar de A.

2.7.3. Exemplo. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ a seqüência de funções $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n$, para todo $n \geq 1$ e todo $x \in [0, 1]$. Temos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge pontualmente para a função $f = \chi_{\{1\}}$. Vamos determinar para quais subconjuntos S de $[0, 1]$ tem-se $f_n|_S \xrightarrow{\text{u}} f|_S$. Temos:

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 1, \\ x^n, & \text{se } x \in [0, 1[. \end{cases}$$

Daí, se $S \subset [0, 1]$ não está contido em $\{1\}$, temos:

$$\sup_{x\in S} \big|f_n(x) - f(x)\big| = \sup_{x\in S\setminus\{1\}} x^n = \big[\sup\big(S \setminus \{1\}\big)\big]^n.$$

Logo $f_n|_S \xrightarrow{\text{u}} f|_S$ se e somente se 1 não é um ponto de acumulação do conjunto S. Concluímos que não é o caso que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente quase sempre para f; de fato, se $S \subset [0, 1]$ é tal que $f_n|_S \xrightarrow{\text{u}} f|_S$ então $[0, 1] \setminus S$ contém um intervalo da forma $]1 - \varepsilon, 1[$, $\varepsilon > 0$, e em particular o conjunto $[0, 1] \setminus S$ não tem medida nula. Note, no entanto, que para todo $\varepsilon > 0$ a seqüência $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente para f em $[0, 1 - \varepsilon]$.

Os Exemplos 2.7.2 e 2.7.3 ilustram que a definição de convergência uniforme quase sempre não é tão interessante. A seguinte definição é mais interessante.

2.7.4. Definição. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge para f *quase uniformemente* e escrevemos $f_n \xrightarrow{\text{qu}} f$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) < \varepsilon$ e $f_n|_{A^c} \xrightarrow{\text{u}} f|_{A^c}$.

Evidentemente, convergência uniforme quase sempre implica em convergência quase uniforme.

2.7.5. EXEMPLO. A seqüência $(f_n)_{n\geq 1}$ do Exemplo 2.7.3 converge quase uniformemente para f, mas não converge uniformemente quase sempre.

2.7.6. LEMA. *Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida, $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções $f_n : X \to \mathrm{I\!R}$ e $f : X \to \mathrm{I\!R}$ uma função. Se $f_n \xrightarrow{\text{qu}} f$ então $f_n \to f$ pontualmente quase sempre.*

DEMONSTRAÇÃO. Para todo $k \geq 1$, existe $A_k \subset X$ mensurável com $\mu(A_k) < \frac{1}{k}$ tal que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente para f em A_k^{c}. Daí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{\mathrm{c}}$; mas:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{\mathrm{c}} = \Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big)^{\mathrm{c}}$$

e obviamente $\mu\big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\big) = 0$. Logo $(f_n)_{n\geq 1}$ converge para f pontualmente quase sempre. □

Para espaços de medida finita, temos o surpreendente fato de que a recíproca do Lema 2.7.6 é válida.

2.7.7. TEOREMA (Egoroff). *Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida e sejam $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathrm{I\!R}$ e $f : X \to \mathrm{I\!R}$ uma função mensurável. Se $\mu(X) < +\infty$ e $f_n \to f$ pontualmente quase sempre então $f_n \xrightarrow{\text{qu}} f$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $x \in X$ é tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ então para todo $k \geq 1$ existe $n_0 \geq 1$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$, para todo $n \geq n_0$; em outras palavras, para todo $k \geq 1$, x pertence ao conjunto:

$$\bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \big\{y \in X : \big|f_n(y) - f(y)\big| < \tfrac{1}{k}\big\}. \tag{2.7.1}$$

Como $f_n \to f$ q. s., vemos que o complementar de (2.7.1) tem medida nula, para todo $k \geq 1$; esse complementar é igual a:

$$\bigcap_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \big\{y \in X : \big|f_n(y) - f(y)\big| \geq \tfrac{1}{k}\big\}.$$

Temos que a seqüência de conjuntos $\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \big\{y \in X : |f_n(y) - f(y)| \geq \frac{1}{k}\big\}$ (indexada em n_0) é decrescente e portanto, como $\mu(X) < +\infty$, temos (Lema 1.4.48):

$$\lim_{n_0\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \big\{y \in X : \big|f_n(y) - f(y)\big| \geq \tfrac{1}{k}\big\}\Big) = 0. \tag{2.7.2}$$

Seja $\varepsilon > 0$ fixado. De (2.7.2), segue que para cada $k \geq 1$ podemos encontrar $n_k \geq 1$ tal que $\mu(A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, onde:

$$A_k = \bigcup_{n=n_k}^{\infty} \big\{y \in X : \big|f_n(y) - f(y)\big| \geq \tfrac{1}{k}\big\}.$$

Seja $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$; temos $\mu(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \varepsilon$. Afirmamos que $(f_n)_{n\ge1}$ converge uniformemente para f em A^{c}. De fato, para todo $k \ge 1$ e todo $x \in A^{\mathrm{c}}$ temos que $x \notin A_k$, o que significa que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$, para todo $n \ge n_k$. Isso completa a demonstração. $\square$

2.7.8. Exemplo. Seja $(f_n)_{n\ge1}$ a seqüência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = \frac{x}{n},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \ge 1$. Temos que $(f_n)_{n\ge1}$ converge pontualmente para a função nula. Dado $S \subset \mathbb{R}$, então:

$$\sup_{x\in S} \big|f_n(x)\big| = \frac{1}{n} \sup_{x\in S} |x|,$$

donde $(f_n)_{n\ge1}$ converge uniformemente para a função nula em S se e somente se o conjunto S é limitado. Mas se $A \subset \mathbb{R}$ tem medida finita então $S = A^{\mathrm{c}}$ não pode ser limitado, pois se S é limitado então $A = S^{\mathrm{c}}$ contém um intervalo ilimitado. Logo não é o caso que $f_n \xrightarrow{\text{qu}} f$, embora $f_n \to f$ pontualmente. Note que não temos uma contradição com o Teorema 2.7.7, já que $\mathbb{R}$ não tem medida finita.

2.7.9. Definição. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(f_n)_{n\ge1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Dizemos que $(f_n)_{n\ge1}$ *converge para f em medida* e escrevemos $f_n \xrightarrow{\mu} f$ se para todo $\varepsilon > 0$ temos:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\big\{x \in X : \big|f_n(x) - f(x)\big| \ge \varepsilon\big\}\Big) = 0. \tag{2.7.3}$$

2.7.10. Lema. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(f_n)_{n\ge1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se $f_n \xrightarrow{\text{qu}} f$ então $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado e provemos (2.7.3). Como $f_n \xrightarrow{\text{qu}} f$, para todo $\eta > 0$ dado, existe um conjunto mensurável A com $\mu(A) < \eta$ tal que $(f_n)_{n\ge1}$ converge uniformemente para f em A^{c}; daí, existe $n_0 \ge 1$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in A^{\mathrm{c}}$ e todo $n \ge n_0$. Temos então:

$$\big\{x \in X : \big|f_n(x) - f(x)\big| \ge \varepsilon\big\} \subset A,$$

para todo $n \ge n_0$, donde:

$$\mu\Big(\big\{x \in X : \big|f_n(x) - f(x)\big| \ge \varepsilon\big\}\Big) < \eta,$$

para todo $n \ge n_0$. Isso completa a demonstração. $\square$

2.7.11. Exemplo. A recíproca do Lema 2.7.10 não é verdadeira; na verdade, convergência em medida não implica sequer convergência pontual quase sempre. De fato, seja $(I_n)_{n\ge1}$ uma seqüência de intervalos contidos em $[0, 1]$ de modo que:

- $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(I_n) = 0$;

- para todo $x \in [0,1]$, existem infinitos índices n com $x \in I_n$ e infinitos índices n com $x \notin I_n$.

Por exemplo, uma possível seqüência $(I_n)_{n\geq 1}$ é:

$$[0,1], \big[0,\tfrac{1}{2}\big], \big[\tfrac{1}{2},1\big], \big[0,\tfrac{1}{3}\big], \big[\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\big], \big[\tfrac{2}{3},1\big], \ldots,\\ \big[0,\tfrac{1}{k}\big], \big[\tfrac{1}{k},\tfrac{2}{k}\big], \big[\tfrac{2}{k},\tfrac{3}{k}\big], \ldots, \big[\tfrac{i}{k},\tfrac{i+1}{k}\big], \ldots, \big[\tfrac{k-1}{k},1\big], \ldots$$

Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ a seqüência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n = \chi_{I_n}$, para todo $n \geq 1$. Afirmamos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge em medida para a função nula. De fato, fixado $\varepsilon > 0$ então:

$$\big\{x \in [0,1] : \big|f_n(x)\big| \geq \varepsilon\big\} \subset I_n,$$

e $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{m}(I_n) = 0$. Logo $f_n \xrightarrow{\mu} 0$. No entanto, para todo $x \in [0,1]$, temos que a seqüência $\big(f_n(x)\big)_{n\geq 1}$ possui uma subseqüência constante e igual a zero e uma subseqüência constante e igual a 1; logo $\big(f_n(x)\big)_{n\geq 1}$ não converge para *nenhum* ponto $x \in [0,1]$.

A recíproca do Lema 2.7.10 não vale, mas temos o seguinte:

2.7.12. Lema. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se $f_n \xrightarrow{\mu} f$ então existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ tal que $f_{n_k} \xrightarrow{\text{qu}} f$; em particular, pelo Lema 2.7.6, $f_{n_k} \to f$ q. s..*

Demonstração. Vamos contruir indutivamente uma seqüência de índices $(n_k)_{k\geq 1}$ tal que $n_1 < n_2 < \cdots$ e tal que:

$$\mu\Big(\big\{x \in X : \big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| \geq \tfrac{1}{k}\big\}\Big) < \frac{1}{2^k},$$

para todo $k \geq 1$. Como $f_n \xrightarrow{\mu} f$, podemos escolher $n_1 \geq 1$ tal que:

$$\mu\Big(\big\{x \in X : \big|f_{n_1}(x) - f(x)\big| \geq 1\big\}\Big) < \frac{1}{2};$$

supondo n_k já definido, podemos escolher $n_{k+1} > n_k$ tal que:

$$\mu\Big(\big\{x \in X : \big|f_{n_{k+1}}(x) - f(x)\big| \geq \tfrac{1}{k+1}\big\}\Big) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Obtemos assim a seqüência $(n_k)_{k\geq 1}$ com as propriedades desejadas. Vamos mostrar que $f_{n_k} \xrightarrow{\text{qu}} f$. Dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar um conjunto mensurável A de medida menor que ε, de modo que $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge uniformemente para f em A^{c}. Seja $t \geq 1$ de modo que:

$$\sum_{k=t}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{t-1}} \leq \varepsilon,$$

e tome:

$$A = \bigcup_{k=t}^{\infty} \big\{x \in X : \big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| \geq \tfrac{1}{k}\big\};$$

daí $\mu(A) < \sum_{k=t}^{\infty} \frac{1}{2^k} \le \varepsilon$. Para $x \in A^{c}$ e $k \ge t$, temos $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$ e portanto:

$$\sup_{x \in A^{c}} \big|f_{n_k}(x) - f(x)\big| \le \frac{1}{k},$$

para todo $k \ge t$. Segue então que $(f_{n_k})_{k \ge 1}$ converge uniformemente para f em A^{c}. □

A cada uma das noções de convergência que consideramos até agora está associada uma correspondente noção de seqüência de Cauchy. Enunciamos a seguinte:

2.7.13. Definição. Seja X um conjunto e $(f_n)_{n \ge 1}$ uma seqüência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que:

- a seqüência $(f_n)_{n \ge 1}$ é *pontualmente de Cauchy* se para todo $x \in X$ a seqüência $\big(f_n(x)\big)_{n \ge 1}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$;
- a seqüência $(f_n)_{n \ge 1}$ é *uniformemente de Cauchy* se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \ge 1$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, para todos $n, m \ge n_0$ e todo $x \in X$.

Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida, dizemos que:

- a seqüência $(f_n)_{n \ge 1}$ é *pontualmente de Cauchy quase sempre* se para quase todo $x \in X$ a seqüência $\big(f_n(x)\big)_{n \ge 1}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$, i.e., se existe $X' \in \mathcal{A}$ com $\mu(X \setminus X') = 0$ tal que $\big(f_n(x)\big)_{n \ge 1}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ para todo $x \in X'$;
- a seqüência $(f_n)_{n \ge 1}$ é *uniformemente de Cauchy quase sempre* se existe $X' \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(X \setminus X') = 0$ e tal que a seqüência $(f_n|_{X'})_{n \ge 1}$ é uniformemente de Cauchy;
- a seqüência $(f_n)_{n \ge 1}$ é *quase uniformemente de Cauchy* se para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) < \varepsilon$ de modo que a seqüência $(f_n|_{A^{c}})_{n \ge 1}$ é uniformemente de Cauchy.

Supondo também que as funções f_n são todas mensuráveis, dizemos que a seqüência $(f_n)_{n \ge 1}$ é *de Cauchy em medida* se para todo $\varepsilon > 0$ e todo $\eta > 0$, existe $n_0 \ge 1$ tal que:

$$\mu\Big(\big\{x \in X : \big|f_n(x) - f_m(x)\big| \ge \varepsilon\big\}\Big) < \eta,$$

para todos $n, m \ge n_0$.

Evidentemente, toda seqüência uniformemente de Cauchy (resp., quase sempre) é pontualmente de Cauchy (resp., quase sempre) e toda seqüência pontualmente convergente (resp., quase sempre) é pontualmente de Cauchy (resp., quase sempre). Além do mais, se $(f_n)_{n \ge 1}$ é uma seqüência pontualmente de Cauchy então existe uma (única) função f tal que $f_n \to f$ pontualmente. Outras propriedades simples dos vários tipos de seqüências de Cauchy definidos acima são exploradas nos Exercícios 2.34, 2.35, 2.36, 2.37, 2.38, 2.39.

Temos a seguinte versão do Lema 2.7.12 para seqüências de Cauchy.

2.7.14. LEMA. *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *um espaço de medida e* $(f_n)_{n\geq 1}$ *uma seqüência de funções mensuráveis* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *que seja de Cauchy em medida. Então existe uma subseqüência* $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ *de* $(f_n)_{n\geq 1}$ *que é quase uniformemente de Cauchy; em particular, pelo resultado dos Exercícios 2.34, 2.35 e 2.36,* $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ *converge quase uniformemente (e também converge pontualmente quase sempre) para uma função mensurável* $f : X \to \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos contruir indutivamente uma seqüência de índices $(n_k)_{k\geq 1}$ tal que $n_1 < n_2 < \cdots$ e tal que:

$$\mu\Big(\big\{x \in X : \big|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\big| \geq \tfrac{1}{2^k}\big\}\Big) < \frac{1}{2^k}, \tag{2.7.4}$$

para todo $k \geq 1$. Como $(f_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy em medida, podemos escolher $n_1 \geq 1$ tal que:

$$\mu\Big(\big\{x \in X : \big|f_n(x) - f_m(x)\big| \geq \tfrac{1}{2}\big\}\Big) < \frac{1}{2},$$

para todos $n, m \geq n_1$. Supondo n_k já definido, escolhemos $n_{k+1} > n_k$ tal que:

$$\mu\Big(\big\{x \in X : \big|f_n(x) - f_m(x)\big| \geq \tfrac{1}{2^{k+1}}\big\}\Big) < \frac{1}{2^{k+1}},$$

para todos $n, m \geq n_{k+1}$. É fácil ver que a seqüência $(n_k)_{n\geq 1}$ assim construída satisfaz (2.7.4), para todo $k \geq 1$. Vamos mostrar que a seqüência $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ é quase uniformemente de Cauchy. Seja dado $\varepsilon > 0$; escolha $t \geq 1$ com:

$$\sum_{k=t}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{t-1}} \leq \varepsilon$$

e defina:

$$A = \bigcup_{k=t}^{\infty} \big\{x \in X : \big|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\big| \geq \tfrac{1}{2^k}\big\}.$$

Claramente, $\mu(A) < \sum_{k=t}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \varepsilon$. Vamos mostrar que a seqüência $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ é uniformemente de Cauchy em A^{c}. Se $x \in A^{\mathrm{c}}$ então:

$$\big|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\big| < \frac{1}{2^k},$$

para todo $k \geq t$. Daí, se $l \geq k \geq t$, temos:

$$\big|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)\big| \leq \sum_{i=k}^{l-1} \big|f_{n_i}(x) - f_{n_{i+1}}(x)\big| \leq \sum_{i=k}^{l-1} \frac{1}{2^i} < \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

para todo $x \in A^{\mathrm{c}}$. Conclui-se então que a seqüência $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ é uniformemente de Cauchy em A^{c}; de fato, dado $\eta > 0$, escolhemos $k_0 \geq t$ com $\frac{1}{2^{k_0-1}} \leq \eta$ e daí:

$$\big|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)\big| < \frac{1}{2^{k_0-1}} \leq \eta,$$

para todo $x \in A^{\mathrm{c}}$ e todos $k, l \geq k_0$. □

2.7.15. COROLÁRIO. *Toda seqüência de Cauchy em medida de funções mensuráveis converge em medida para alguma função mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $(f_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy em medida então, pelo Lema 2.7.14, existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ que converge quase uniformemente para uma função mensurável f. Mas, pelo Lema 2.7.10, isso implica que $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge em medida para f. Segue então do resultado do Exercício 2.40 que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge em medida para f. □

2.8. O Teorema de Fubini em $\mathbb{R}^n$

Ao longo desta seção consideramos fixados inteiros positivos m e n e identificamos $\mathbb{R}^{m+n}$ com o produto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ através da aplicação:

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \ni (x,y) \longmapsto (x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^{m+n}. \tag{2.8.1}$$

Dado um subconjunto A de $\mathbb{R}^{m+n}$ e dado $x \in \mathbb{R}^m$ denotamos por A_x a *fatia vertical de A correspondente à abscissa x* definida por:

$$A_x = \big\{ y \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in A \big\}.$$

Se $i_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ denota a função $i_x(y) = (x,y)$ então obviamente:

$$A_x = i_x^{-1}(A), \tag{2.8.2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Temos portanto o seguinte:

2.8.1. LEMA. *Se A é um Boreleano de $\mathbb{R}^{m+n}$ então A_x é um Boreleano de $\mathbb{R}^n$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.*

DEMONSTRAÇÃO. A função i_x é contínua e portanto Borel mensurável (veja Lema 2.1.15). A conclusão segue de (2.8.2). □

Segue do Lema 2.8.1 que se A é um Boreleano de $\mathbb{R}^{m+n}$ então faz sentido considerar a medida de Lebesgue $\mathfrak{m}(A_x)$ da fatia A_x, para cada $x \in \mathbb{R}^m$.

2.8.2. LEMA. *Se A é um Boreleano de $\mathbb{R}^{m+n}$ então a função:*

$$\mathbb{R}^m \ni x \longmapsto \mathfrak{m}(A_x) \in [0,+\infty] \tag{2.8.3}$$

é mensurável e vale a igualdade:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(A_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \mathfrak{m}(A). \tag{2.8.4}$$

Note que usamos a notação $\mathfrak{m}$ indistintamente para a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m+n}$; mais especificamente, em (2.8.3) usamos a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, a integral do lado esquerdo da igualdade em (2.8.4) é feita com respeito à medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^m$ e no lado direito da igualdade em (2.8.4) usamos a medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^{m+n}$.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 2.8.2. Denote por $\mathcal{C}$ a coleção de todos os Boreleanos A de $\mathbb{R}^{m+n}$ para os quais a função (2.8.3) é mensurável e a igualdade (2.8.4) é satisfeita. A idéia da prova é mostrar várias propriedades da coleção $\mathcal{C}$ até que finalmente concluímos que ela coincide com a classe de todos os Boreleanos de $\mathbb{R}^{m+n}$.

Passo 1. *Os blocos retangulares $(m+n)$-dimensionais pertencem a $\mathcal{C}$.*

Se A é um bloco retangular $(m+n)$-dimensional então podemos escrever $A = A_1 \times A_2$, onde A_1 e A_2 são respectivamente um bloco retangular m-dimensional e um bloco retangular n-dimensional. Para todo $x \in \mathbb{R}^m$, temos:

$$A_x = \begin{cases} A_2, & \text{se } x \in A_1, \\ \emptyset, & \text{se } x \notin A_1, \end{cases}$$

e portanto:

$$\mathfrak{m}(A_x) = |A_2|\, \chi_{A_1}(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Segue que (2.8.3) é uma função simples mensurável cuja integral é igual a $|A_2|\,|A_1| = |A|$.

Passo 2. *Se $A, B \in \mathcal{C}$ e A e B são disjuntos então $A \cup B \in \mathcal{C}$.*

Segue de (2.8.2) que $(A \cup B)_x = A_x \cup B_x$ e que A_x e B_x são disjuntos para todo $x \in \mathbb{R}^m$; logo:

$$\mathfrak{m}\big((A \cup B)_x\big) = \mathfrak{m}(A_x) + \mathfrak{m}(B_x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Segue que a função $x \mapsto \mathfrak{m}\big((A \cup B)_x\big)$ é mensurável, sendo uma soma de funções mensuráveis; sua integral é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}\big((A \cup B)_x\big)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(A_x)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) + \int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(B_x)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\ &= \mathfrak{m}(A) + \mathfrak{m}(B) = \mathfrak{m}(A \cup B). \end{aligned}$$

Passo 3. *Se $A, B \in \mathcal{C}$, $B \subset A$ e B é limitado então $A \setminus B \in \mathcal{C}$.*

Como B é limitado então $\mathfrak{m}(B) < +\infty$ e $\mathfrak{m}(B_x) < +\infty$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Segue de (2.8.2) que $B_x \subset A_x$ e $(A \setminus B)_x = A_x \setminus B_x$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$; logo:

$$\mathfrak{m}\big((A \setminus B)_x\big) = \mathfrak{m}(A_x) - \mathfrak{m}(B_x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$, provando que a função $x \mapsto \mathfrak{m}\big((A \setminus B)_x\big)$ é mensurável. Além do mais:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}\big((A \setminus B)_x\big)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(A_x)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) - \int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(B_x)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\ &= \mathfrak{m}(A) - \mathfrak{m}(B) = \mathfrak{m}(A \setminus B). \end{aligned}$$

Passo 4. *Se $(A^k)_{k \ge 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{C}$ e se $A^k \nearrow A$ então $A \in \mathcal{C}$.*

Segue de (2.8.2) que $A^k_x \nearrow A_x$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$; logo, pelo Lema 1.4.48:

$$\mathfrak{m}(A_x) = \lim_{k \to \infty} \mathfrak{m}(A^k_x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Segue que a função $x \mapsto \mathfrak{m}(A_x)$ é mensurável, sendo um limite de funções mensuráveis. Pelo Teorema da Convergência

Monotônica, temos:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(A_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(A_x^k)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}(A^k) = \mathfrak{m}(A).$$

Passo 5. *Se $(A^k)_{k\ge 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{C}$, A^1 é limitado e $A^k \searrow A$ então $A \in \mathcal{C}$.*

Como A^1 é limitado, temos $\mathfrak{m}(A^k) < +\infty$ e $\mathfrak{m}(A_x^k) < +\infty$, para todos $k \ge 1$ e $x \in \mathbb{R}^m$. Essa observação permite demonstrar o passo 5 de forma análoga à demonstração do passo 4.

Passo 6. *Se $A, B \in \mathcal{C}$, $A \cap B \in \mathcal{C}$ e $A \cap B$ é limitado então $A \cup B \in \mathcal{C}$.*

Segue dos passos 2 e 3, observando que:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \cup B,$$

sendo que os conjuntos $A \setminus (A \cap B)$ e B são disjuntos.

Passo 7. *Se $B_1, \ldots, B_k$ são blocos retangulares $(m+n)$-dimensionais então $\bigcup_{i=1}^k B_i \in \mathcal{C}$.*

Usamos indução em k. O caso $k = 1$ segue do passo 1. Suponha que a união de qualquer coleção de k blocos retangulares $(m+n)$-dimensionais pertence a $\mathcal{C}$ e sejam dados blocos retangulares $(m+n)$-dimensionais $B_1, \ldots, B_{k+1}$. Como qualquer subconjunto de uma união finita de blocos retangulares é sempre um conjunto limitado, em virtude do passo 6, para mostrar que $\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i = \big(\bigcup_{i=1}^k B_i\big) \cup B_{k+1}$ está em $\mathcal{C}$ é suficiente mostrar que $\big(\bigcup_{i=1}^k B_i\big) \cap B_{k+1}$ está em $\mathcal{C}$. Mas:

$$\Big(\bigcup_{i=1}^k B_i\Big) \cap B_{k+1} = \bigcup_{i=1}^k (B_i \cap B_{k+1}),$$

sendo que $B_i \cap B_{k+1}$ é um bloco retangular $(m+n)$-dimensional para $i = 1, \ldots, k$. Segue da hipótese de indução que $\big(\bigcup_{i=1}^k B_i\big) \cap B_{k+1} \in \mathcal{C}$.

Passo 8. *Todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{m+n}$ pertence a $\mathcal{C}$.*

Se $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é aberto então o Lema 1.4.23 nos permite escrever $U = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$, onde cada B_i é um bloco retangular $(m+n)$-dimensional. Definindo $A_k = \bigcup_{i=1}^k B_i$ então $A_k \in \mathcal{C}$, pelo passo 7 e $A_k \nearrow U$. A conclusão segue do passo 4.

Passo 9. *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^{m+n}$ de tipo G_δ está em $\mathcal{C}$.*

Seja $Z \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um G_δ. Assumimos inicialmente que Z é limitado. Seja $(U_k)_{k\ge 1}$ uma seqüência de abertos de $\mathbb{R}^{m+n}$ com $Z = \bigcap_{k=1}^\infty U_k$ e seja U_0 um aberto limitado de $\mathbb{R}^{m+n}$ que contém Z. Definindo:

$$A_k = \bigcap_{i=0}^k U_i,$$

então A_k é um aberto limitado para todo $k \geq 1$ e $A_k \searrow Z$. Segue dos passos 5 e 8 que $Z \in \mathcal{C}$.

Seja agora $Z \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um G_δ arbitrário. Temos que

$$Z_k = Z \cap \left]-k, k\right[^{m+n}$$

é um G_δ limitado para todo $k \geq 1$ e portanto $Z_k \in \mathcal{C}$, pelo que mostramos acima. A conclusão segue do passo 4, já que $Z_k \nearrow Z$.

Passo 10. *A coleção $\mathcal{C}$ coincide com a coleção de todos os subconjuntos Boreleanos de $\mathbb{R}^{m+n}$.*

Seja $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ um Boreleano. Pelo Lema 1.4.28 existe um subconjunto Z de $\mathbb{R}^{m+n}$ de tipo G_δ com $A \subset Z$ e $\mathfrak{m}(Z \setminus A) = 0$. Pelo Lema 1.4.50, existe um subconjunto E de $\mathbb{R}^{m+n}$ de tipo G_δ com $Z \setminus A \subset E$ e $\mathfrak{m}(E) = \mathfrak{m}(Z \setminus A) = 0$. O passo 9 nos garante que E e Z estão em $\mathcal{C}$. Logo:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(E_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \mathfrak{m}(E) = 0;$$

como $\mathfrak{m}(E_x) \geq 0$, para todo x, o resultado do Exercício 2.21 implica que $\mathfrak{m}(E_x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^{m+n}$. Como $(Z \setminus A)_x \subset E_x$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$, segue que $\mathfrak{m}\big((Z \setminus A)_x\big) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^m$. Temos então:

$$\mathfrak{m}(Z_x) = \mathfrak{m}(A_x) + \mathfrak{m}\big((Z \setminus A)_x\big) = \mathfrak{m}(A_x),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^m$, já que Z_x é união disjunta de A_x e $(Z \setminus A)_x$, para todo x. Vemos então que a funções $x \mapsto \mathfrak{m}(Z_x)$ e $x \mapsto \mathfrak{m}(A_x)$ são iguais quase sempre, o que implica que $x \mapsto \mathfrak{m}(A_x)$ é uma função mensurável pelo resultado do item (b) do Exercício 2.8. Além do mais:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(A_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathfrak{m}(Z_x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \mathfrak{m}(Z) = \mathfrak{m}(A),$$

provando que $A \in \mathcal{C}$. Isso completa a demonstração. $\square$

Se A é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^{m+n}$ então não é verdade em geral que as fatias verticais A_x são mensuráveis para todo $x \in \mathbb{R}^m$; por exemplo, se B é um subconjunto não mensurável de $\mathbb{R}^n$ então $A = \{0\} \times B$ é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^{m+n}$ (com medida exterior nula), mas a fatia $A_0 = B$ não é mensurável. No entanto, mostraremos abaixo que se A é mensurável então *quase todas* as fatias A_x de A são mensuráveis. Faz sentido também então considerar a integral em (2.8.4), tendo em mente a seguinte convenção: se X é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$ e se $f(x)$ é uma expressão que faz sentido apenas *para quase todo* $x \in X$ então escrevemos $\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$, entendendo que *valores arbitrários* de $\overline{\mathbb{R}}$ podem ser atribuídos à expressão $f(x)$ no conjunto de medida nula no qual ela não está definida. Em vista do resultado do Exercício 2.8 e do Corolário 2.4.11, essa convenção define o símbolo $\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$ de forma inequívoca.

2.8.3. Proposição. *Se A é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^{m+n}$ então para quase todo $x \in \mathbb{R}^m$ a fatia vertical A_x é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$, a função $x \mapsto \mathfrak{m}(A_x)$ é mensurável e a medida de A é dada pela igualdade* (2.8.4).

Demonstração. Basta repetir os argumentos da demonstração do passo 10 do Lema 2.8.2; a única diferença é que não sabemos *a priori* que as fatias de A são mensuráveis. Mas sabemos que E_x tem medida nula para quase todo $x \in \mathbb{R}^m$ e portanto $(Z \setminus A)_x$ é mensurável e tem medida nula para quase todo $x \in \mathbb{R}^m$; como:

$$A_x = Z_x \setminus (Z \setminus A)_x,$$

segue que também A_x é mensurável para quase todo $x \in \mathbb{R}^m$. $\square$

Observamos que se X é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^m$ e se Y é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^n$ então $X \times Y$ é um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^{m+n}$ (veja Exercício 1.27).

2.8.4. Teorema (Fubini–Tonelli). *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos mensuráveis e $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função quase integrável. Então:*

- *para quase todo $x \in X$, a função $Y \ni y \mapsto f(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}$ é quase integrável;*
- *a função $X \ni x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \in \overline{\mathbb{R}}$ é quase integrável;*
- *vale a igualdade:*

$$\int_X \Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y).$$

Demonstração. Dividimos a demonstração em itens.

- *O teorema vale se f é simples, mensurável e não negativa.*

  Podemos escrever $f = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A^i}$, com $c_i \in [0, +\infty]$ e A^i um subconjunto mensurável de $X \times Y$, para $i = 1, \ldots, k$. Note que, se $x \in X$, temos:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A^i_x}(y), \tag{2.8.5}$$

  para todo $y \in Y$. Pela Proposição 2.8.3, existe para cada $i = 1, \ldots, k$ um conjunto de medida nula $N_i \subset \mathbb{R}^m$ tal que A^i_x é mensurável para todo $x \in \mathbb{R}^m \setminus N_i$. Daí $N = \bigcup_{i=1}^k N_i$ tem medida nula e segue de (2.8.5) que para $x \in \mathbb{R}^m \setminus N$, a função $y \mapsto f(x,y)$ é mensurável e sua integral é dada por:

$$\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \int_Y \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A^i_x}(y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \sum_{i=1}^k c_i \mathfrak{m}(A^i_x).$$

Logo:

$$\int_X \Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{k} c_i \mathfrak{m}(A_x^i)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathfrak{m}(A^i)$$
$$= \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y).$$

- *O teorema vale se f é mensurável e não negativa.*
  Seja $(f_k)_{k\ge 1}$ uma seqüências de funções $f_k : X \times Y \to [0,+\infty]$ simples e mensuráveis com $f_k \nearrow f$. Seja $N_k \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto de medida nula tal que a função $y \mapsto f_k(x,y)$ é mensurável para todo $x \in X \setminus N_k$. Daí $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ tem medida nula e a função:

$$Y \ni y \longmapsto f(x,y) = \lim_{k\to\infty} f_k(x,y) \in [0,+\infty]$$

é mensurável para todo $x \in X \setminus N$. Pelo Teorema da Convergência Monotônica, temos:

$$\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \lim_{k\to\infty} \int_Y f_k(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y),$$

para todo $x \in X \setminus N$. Logo a função $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)$ é mensurável e, usando novamente o Teorema da Convergência Monotônica, obtemos:

$$\int_X \Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \lim_{k\to\infty} \int_X \Big(\int_Y f_k(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{X\times Y} f_k(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y) = \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y).$$

- *O teorema vale se f é quase integrável.*
  Como f^+ e f^- são funções mensuráveis não negativas, temos:

$$\int_X \Big(\int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_{X\times Y} f^+(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y), \tag{2.8.6}$$
$$\int_X \Big(\int_Y f^-(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_{X\times Y} f^-(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y). \tag{2.8.7}$$

Como f é quase integrável, temos que f^+ é integrável ou f^- é integrável; para fixar as idéias, vamos supor que $\int_{X\times Y} f^-\,\mathrm{d}\mathfrak{m} < +\infty$. Tendo em mente o resultado do Exercício 2.19, segue de (2.8.7) que:

$$\int_Y f^-(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) < +\infty,$$

para quase todo $x \in X$. Segue que a função $y \mapsto f(x,y)$ é quase integrável para quase todo $x \in X$; além do mais, de (2.8.6) e (2.8.7) vem:

$$\begin{aligned}\int_X\Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \int_X\Big(\int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\\ &\quad - \int_X\Big(\int_Y f^-(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\\ &= \int_{X\times Y} f^+(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y) - \int_{X\times Y} f^-(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y)\\ &= \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y). \qquad \square\end{aligned}$$

Seja $\sigma : \{1,\ldots,m+n\} \to \{1,\ldots,m+n\}$ uma aplicação bijetora (i.e., uma *permutação* de $m+n$ elementos) e considere o isomorfismo linear $\widehat{\sigma}$ de $\mathbb{R}^{m+n}$ definido por:

$$\widehat{\sigma}(z_1,\ldots,z_{m+n}) = (z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(m+n)}),$$

para todo $(z_1,\ldots,z_{m+n}) \in \mathbb{R}^{m+n}$. Segue do resultado do Exercício 1.11 que $\widehat{\sigma}$ *preserva medida*, i.e., $\mathfrak{m}\big(\widehat{\sigma}^{-1}(A)\big) = \mathfrak{m}(A)$, para todo subconjunto mensurável A de $\mathbb{R}^{m+n}$ (veja Definição 2.1). Pelo resultado do Exercício 2.16, uma função $f : \mathbb{R}^{m+n} \to \overline{\mathbb{R}}$ é quase integrável se e somente se $f\circ\widehat{\sigma}$ é quase integrável e, nesse caso, as integrais de f e $f\circ\widehat{\sigma}$ coincidem. Em vista dessas observações, temos o seguinte:

2.8.5. Corolário. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos mensuráveis e $f : X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função quase integrável. Então:*

- *para quase todo $y \in Y$, a função $X \ni x \mapsto f(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}$ é quase integrável;*
- *a função $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ é quase integrável;*
- *vale a igualdade:*

$$\begin{aligned}\int_Y\Big(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) &= \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y)\\ &= \int_X\Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x).\end{aligned}$$

Demonstração. Considere a permutação σ de $m+n$ elementos dada por:

$$\sigma(i) = \begin{cases} n+i, & \text{se } 1 \le i \le m,\\ i-m, & \text{se } m+1 \le i \le m+n,\end{cases}$$

de modo que:

$$\widehat{\sigma}(y_1,\ldots,y_n,x_1,\ldots,x_m) = (x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n),$$

para todos $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$. Temos que:

$$\widehat{\sigma}^{-1}(X\times Y) = Y\times X \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{m+n}.$$

Em vista das observações que precedem o enunciado do corolário, temos que $f\circ\widehat{\sigma}|_{Y\times X} : Y\times X \to \overline{\mathbb{R}}$ é quase integrável e tem a mesma integral que f. A conclusão é obtida aplicando o Teorema 2.8.4 à função $f \circ \widehat{\sigma}|_{Y \times X}$, trocando os papéis de m e n. □

É possível que uma função mensurável $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ seja tal que as *integrais iteradas* $\int_X \big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$ e $\int_Y \big(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)$ sejam ambas bem-definidas, porém distintas; em vista do Corolário 2.8.5, isso somente é possível quando a função f não é quase integrável.

2.8.6. Exemplo. Seja $(a_{ij})_{i,j\ge 1}$ uma seqüência dupla de números reais tal que as séries:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}, \quad i = 1,2,\dots, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}, \quad j = 1,2,\dots, \tag{2.8.8}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big), \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\Big), \tag{2.8.9}$$

são todas absolutamente convergentes, mas:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big) \ne \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\Big).$$

Tome, por exemplo:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j,\\ -1, & \text{se } i+1 = j,\\ 0, & \text{caso contrário,}\end{cases}$$

de modo que todas as séries em (2.8.8) e (2.8.9) têm apenas um número finito de termos não nulos e:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big) = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\Big) = 1.$$

Considere a função $f : [0,+\infty[\times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}\, \chi_{[i-1,i[\times[j-1,j[},$$

ou seja, a restrição de f ao retângulo $[i-1,i[\times [j-1,j[$ é igual a a_{ij}, para todos $i,j \ge 1$. Fixado $x \in [0,+\infty[$ então:

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\, \chi_{[j-1,j[}(y),$$

para todo $y \in [0,+\infty[$, onde $i \ge 1$ é tal que $x \in [i-1,i[$. Como a série $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ é absolutamente convergente, segue do resultado do Exercício 2.27 que a função $y \mapsto f(x,y)$ é integrável e:

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij};$$

daí:

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big)\chi_{[i-1,i[}(x),$$

para todo $x \in [0,+\infty[$. Como a série $\sum_{i=1}^{\infty}\big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\big)$ é absolutamente convergente, usando novamente o resultado do Exercício 2.27, concluímos que a função $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)$ é integrável e:

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big).$$

De modo análogo, mostra-se que:

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y) = \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\Big),$$

e portanto:

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \neq \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\Big)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y).$$

Exercícios para o Capítulo 2

Funções Mensuráveis.

EXERCÍCIO 2.1. Sejam $(X,\mathcal{A})$, $(X',\mathcal{A}')$ espaços mensuráveis arbitrários. Mostre que toda função constante $f : X \to X'$ é mensurável.

EXERCÍCIO 2.2. Sejam X um conjunto, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de X e $Y \subset X$ um subconjunto. Mostre que $\mathcal{A}|_Y$ é uma σ-álgebra de partes de Y.

EXERCÍCIO 2.3. Sejam X um conjunto e $Y \subset X$ um subconjunto. Se $\mathcal{C}$ é um conjunto de geradores para uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ de partes de X, mostre que o conjunto:

$$\mathcal{C}|_Y = \big\{E \cap Y : E \in \mathcal{C}\big\}$$

é um conjunto de geradores para a σ-álgebra $\mathcal{A}|_Y$ de partes de Y; em símbolos:

$$\sigma[\mathcal{C}]|_Y = \sigma[\mathcal{C}|_Y].$$

EXERCÍCIO 2.4. Mostre que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

EXERCÍCIO 2.5. Mostre que os intervalos $[-\infty, c]$, $c \in \mathbb{R}$, constituem um conjunto de geradores para a σ-álgebra de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$.

EXERCÍCIO 2.6. Seja $(X,\mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções mensuráveis. Mostre que o conjunto:

$$\big\{x \in X : f(x) = g(x)\big\}$$

é mensurável.

Exercício 2.7. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos \frac{x}{y}, & \text{se } y \geq 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}, & \text{se } -1 < y < 1, \\ \chi_{\mathbb{Q}}(x+y), & \text{se } y \leq -1, \end{cases}$$

é Borel mensurável.

Exercício 2.8. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto mensurável e $(X', \mathcal{A}')$ um espaço mensurável. Dada uma função $f : X \to X'$, mostre que:

(a) se existe $X_1 \subset X$ tal que $X \setminus X_1$ tem medida nula e tal que $f|_{X_1}$ é mensurável então f é mensurável;
(b) se f é mensurável e se $g : X \to X'$ é igual a f quase sempre então g também é mensurável;
(c) se $(f_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de funções mensuráveis $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e se $f_k \to g$ q. s. então $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ também é mensurável.

Exercício 2.9. Denote por $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ a projeção nas m primeiras coordenadas. Mostre que a função:

$$\pi : \big(\mathbb{R}^{m+n}, \mathcal{M}(\mathbb{R}^{m+n})\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}^m, \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)\big),$$

é mensurável (note que não estamos seguindo a convenção 2.1.3).

Exercício 2.10. Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma função definida num subconjunto X de $\mathbb{R}^m$. Recorde que o *gráfico* de f é o conjunto:

$$\operatorname{gr}(f) = \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in X\big\} \subset \mathbb{R}^{m+n}. \tag{2.8.10}$$

Mostre que:

- se X é Boreleano e f é Borel mensurável então $\operatorname{gr}(f)$ é Boreleano;
- se X é mensurável e f é mensurável então $\operatorname{gr}(f)$ é mensurável.

Definição da Integral.

Exercício 2.11. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Mostre que:

(a) f é integrável se e somente se $|f|$ é integrável;
(b) se f é quase integrável então:

$$\Big| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \Big| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Exercício 2.12. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $(f_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_k : X \to [0, +\infty]$. Se $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, mostre que:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

EXERCÍCIO 2.13. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dada uma função mensurável $f : X \to [0, +\infty]$, mostre que a aplicação $\nu_f : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definida por:

$$\nu_f(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu, \quad E \in \mathcal{A},$$

é uma medida (a medida ν_f é chamada a *integral indefinida* de f e é denotada por $\nu_f = \int f \, \mathrm{d}\mu$).

EXERCÍCIO 2.14. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função quase integrável. Mostre que:

(a) se $(A_k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos e se $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ então:

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{r \to \infty} \sum_{k=1}^{r} \int_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu;$$

(b) se $(A_k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência de conjuntos mensuráveis e $A_k \nearrow A$ então:

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k \to \infty} \int_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu; \tag{2.8.11}$$

(c) se $(A_k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência de conjuntos mensuráveis, $A_k \searrow A$ e se $f|_{A_1}$ é integrável então vale a igualdade (2.8.11).

DEFINIÇÃO 2.1. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(X', \mathcal{A}', \mu')$ espaços de medida. Dizemos que uma função $\phi : X \to X'$ *preserva medida* se ϕ é mensurável e se $\mu\big(\phi^{-1}(A)\big) = \mu'(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}'$.

EXERCÍCIO 2.15. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(X', \mathcal{A}')$ um espaço mensurável e $\phi : X \to X'$ uma aplicação mensurável. Mostre que:

(a) a aplicação $(\phi_* \mu) : \mathcal{A}' \to [0, +\infty]$ definida por:

$$(\phi_* \mu)(A) = \mu\big(\phi^{-1}(A)\big),$$

para todo $A \in \mathcal{A}'$, é uma medida em $\mathcal{A}'$;

(b) se μ' é uma medida em $\mathcal{A}'$ então $\phi : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (X', \mathcal{A}', \mu')$ preserva medida se e somente se $\phi_* \mu = \mu'$.

Dizemos que $\phi_* \mu$ é a *imagem* da medida μ pela aplicação mensurável ϕ.

EXERCÍCIO 2.16. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(X', \mathcal{A}', \mu')$ espaços de medida e seja $\phi : X \to X'$ uma função que preserva medida. Dada uma função mensurável $f : X' \to \overline{\mathbb{R}}$, mostre que f é quase integrável se e somente se $f \circ \phi$ é quase integrável e, nesse caso:

$$\int_{X'} f \, \mathrm{d}\mu' = \int_X f \circ \phi \, \mathrm{d}\mu.$$

EXERCÍCIO 2.17. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $\mathcal{A}'$ uma σ-álgebra de partes de X contida em $\mathcal{A}$ e μ' a restrição de μ a $\mathcal{A}'$. Dada uma função mensurável $f : (X, \mathcal{A}') \to \overline{\mathbb{R}}$, mostre que f é quase integrável com respeito a μ se e somente se f é quase integrável com respeito a μ' e, nesse caso $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu'$.

DEFINIÇÃO 2.2. Seja X um conjunto. A aplicação $\mu : \wp(X) \to [0, +\infty]$ definida por:

$$\mu(E) = \text{número de elementos do conjunto } E, \quad E \subset X,$$

é chamada a *medida de contagem*.

EXERCÍCIO 2.18. Seja X o conjunto dos números inteiros positivos e seja $\mu : \wp(X) \to [0, +\infty]$ a medida de contagem. Mostre que:

- dada uma função $f : X \to [0, +\infty]$ então:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n); \tag{2.8.12}$$

- uma função $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é integrável se e somente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ é absolutamente convergente e nesse caso vale a identidade (2.8.12).

EXERCÍCIO 2.19. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função quase integrável. Mostre que:

- se $\int_X f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ então $f(x) < +\infty$ para quase todo $x \in X$;
- se $\int_X f \,\mathrm{d}\mu > -\infty$ então $f(x) > -\infty$ para quase todo $x \in X$;
- se f é integrável então $f(x) \in \mathbb{R}$ para quase todo $x \in X$.

EXERCÍCIO 2.20. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções mensuráveis, com g quase integrável. Mostre que:

- se $\int_X g \,\mathrm{d}\mu > -\infty$ e $f \geq g$ q. s. então f é quase integrável e $\int_X f \,\mathrm{d}\mu > -\infty$;
- se $\int_X g \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ e $f \leq g$ q. s. então f é quase integrável e $\int_X f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$;
- se g é integrável e $|f| \leq g$ q. s. então f é integrável.

EXERCÍCIO 2.21. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dada uma função mensurável $f : X \to [0, +\infty]$, mostre que $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0$ se e somente se $f = 0$ quase sempre.

EXERCÍCIO 2.22. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dadas funções integráveis $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tais que $f \leq g$ e:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu,$$

mostre que $f = g$ quase sempre.

EXERCÍCIO 2.23. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função integrável. Mostre que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo conjunto mensurável $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) < \delta$ temos:

$$\Big| \int_A f \,\mathrm{d}\mu \Big| < \varepsilon.$$

EXERCÍCIO 2.24. Seja $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função integrável definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Fixado $t_0 \in I$, considere a função $F : I \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f \,\mathrm{d}\mathfrak{m},$$

para todo $t \in I$. Mostre que:

(a) F é contínua;

(b) dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que dados $n \geq 1$ e intervalos abertos dois a dois disjuntos $]x_i, y_i[\subset I$, $i = 1, \ldots, n$, então:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - x_i < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| < \varepsilon;$$

(c) se f é limitada então F é Lipschitziana com constante de Lipschitz igual a $\sup_{t \in I} |f(t)|$;

(d) (*teorema fundamental do cálculo*) se f é contínua num ponto $t \in I$ então F é derivável no ponto t e $F'(t) = f(t)$;

(e) se f é contínua e $G : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva qualquer de f (i.e., $G' = f$) então:

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = G(b) - G(a),$$

para todos $a, b \in I$.

EXERCÍCIO 2.25. (*integração por partes*) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1, mostre que:

$$\int_a^b f(x)g'(x) \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x).$$

Teoremas de Convergência.

EXERCÍCIO 2.26. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $(f_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de funções integráveis (resp., quase integráveis) $f_k : X \to \mathbb{R}$. Suponha que $(f_k)_{k\geq 1}$ *converge uniformemente* para uma função $f : X \to \mathbb{R}$, i.e., para todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \geq 1$ tal que $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$ e todo $k \geq k_0$. Se $\mu(X) < +\infty$, mostre que f também é integrável (resp., quase integrável) e que:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

EXERCÍCIO 2.27. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $(f_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de funções integráveis $f_k : X \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_k| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Mostre que:

- a série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ é absolutamente convergente para quase todo $x \in X$;

- se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável tal que $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ q. s. então f é integrável e:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}.$$

EXERCÍCIO 2.28. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que para todo $\varepsilon > 0$ existe uma função simples integrável $\phi : X \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\int_X |f - \phi| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

EXERCÍCIO 2.29. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(A_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de subconjuntos mensuráveis de X e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função quase integrável. Assuma que para todo $x \in X$ o conjunto:

$$\big\{k \geq 1 : x \notin A_k\big\}$$

é finito. Mostre que:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f \, \mathrm{d}\mu.$$

EXERCÍCIO 2.30. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Mostre que as funções:

$$g_1(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(tx) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x), \quad g_2(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{sen}(tx) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x),$$

são contínuas e que:

$$\lim_{t\to\pm\infty} g_1(t) = 0, \quad \lim_{t\to\pm\infty} g_2(t) = 0.$$

EXERCÍCIO 2.31. Considere a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(tx) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que ϕ é derivável e que:

$$\phi'(t) = -\frac{t}{2}\,\phi(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) Mostre que $\phi(t) = ce^{-\frac{t^2}{4}}$, para todo $t \in \mathbb{R}$, onde:

$$c = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x). \tag{2.8.13}$$

No Exercício 3.5 pediremos ao leitor para calcular explicitamente a integral em (2.8.13).

Exercício 2.32. Considere a função $\phi : \,]0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\phi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x),$$

para todo $t > 0$.

(a) Mostre que ϕ é derivável e que $\phi'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$, para todo $t > 0$.
(b) Mostre que $\lim_{t\to+\infty}\phi(t) = 0$.
(c) Conclua que $\phi(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$, para todo $t > 0$.
(d) Usando integração por partes, verifique que:

$$\phi(t) = \int_0^1 e^{-tx}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) + e^{-t}\cos 1 - \int_1^{+\infty} \cos x\; e^{-tx}\,\frac{1+tx}{x^2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x),$$

para todo $t > 0$.
(e) Mostre que:

$$\lim_{t\to 0}\phi(t) = {}^{(R)}\!\!\int_0^{+\infty} f = \frac{\pi}{2},$$

onde $f : [0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, para $x > 0$ e $f(0) = 1$.

Mais sobre Convergência de Seqüências de Funções.

Exercício 2.33. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida, $(f_n)_{n\ge1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se $(f_n)_{n\ge1}$ converge em medida para f, mostre que toda subseqüência de $(f_n)_{n\ge1}$ também converge em medida para f.

Exercício 2.34. Sejam $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida e $(f_n)_{n\ge1}$ uma seqüência pontualmente de Cauchy quase sempre. Mostre que existe uma função $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \to f$ pontualmente q. s.; se as funções f_n são todas mensuráveis, mostre que podemos escolher a função f também mensurável.

Exercício 2.35. Mostre que toda seqüência uniformemente de Cauchy quase sempre é quase uniformemente de Cauchy e que toda seqüência quase uniformemente de Cauchy é pontualmente de Cauchy quase sempre.

Exercício 2.36. Se X é um conjunto, $(f_n)_{n\ge1}$ é uma seqüência uniformemente de Cauchy de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $f_n \to f$ pontualmente, mostre que $f_n \xrightarrow{\mathrm{u}} f$. Se $(X,\mathcal{A},\mu)$ é um espaço de medida, $(f_n)_{n\ge1}$ é uniformemente de Cauchy quase sempre (resp., quase uniformemente de Cauchy) e $f_n \to f$ pontualmente q. s., mostre que $f_n \xrightarrow{\mathrm{u}} f$ q. s. (resp., que $f_n \xrightarrow{\mathrm{qu}} f$).

Exercício 2.37. Mostre que:

- toda seqüência uniformemente convergente (resp., quase sempre) é uniformemente de Cauchy (resp., quase sempre);
- toda seqüência quase uniformemente convergente é quase uniformemente de Cauchy;

- toda seqüência de funções mensuráveis que é convergente em medida é de Cauchy em medida.

EXERCÍCIO 2.38. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$ e seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$. Mostre que se $(f_n)_{n\geq 1}$ é pontualmente de Cauchy quase sempre então $(f_n)_{n\geq 1}$ é quase uniformemente de Cauchy.

EXERCÍCIO 2.39. Mostre que se uma seqüência de funções mensuráveis é quase uniformemente de Cauchy então ela é de Cauchy em medida.

EXERCÍCIO 2.40. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ que é de Cauchy em medida e $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ uma subseqüência de $(f_n)_{n\geq 1}$ que converge em medida para uma função mensurável $f : X \to \mathbb{R}$. Mostre que $(f_n)_{n\geq 1}$ também converge em medida para f.

EXERCÍCIO 2.41. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções mensuráveis $f_n : X \to \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Se $f_n \xrightarrow{\mu} f$ e $f_n \xrightarrow{\mu} g$, mostre que $f(x) = g(x)$ para quase todo $x \in X$.

O Teorema de Fubini em $\mathbb{R}^n$.

EXERCÍCIO 2.42. Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma função definida num subconjunto X de $\mathbb{R}^m$. Mostre que se o gráfico de f (recorde (2.8.10)) é mensurável então $\mathfrak{m}\big(\mathrm{gr}(f)\big) = 0$.

EXERCÍCIO 2.43. Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos mensuráveis e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ funções integráveis. Mostre que a função:

$$X \times Y \ni (x, y) \longmapsto f(x)g(y) \in \overline{\mathbb{R}}$$

é integrável e que sua integral é dada por:

$$\int_{X\times Y} f(x)g(y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x, y) = \Big(\int_X f\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big)\Big(\int_Y g\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\Big).$$

EXERCÍCIO 2.44. Seja Δ_n o *simplexo padrão n-dimensional* definido por:

$$\Delta_n = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in [0, +\infty[^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1\Big\}.$$

(a) Mostre que Δ_n é mensurável para todo $n \geq 1$.

(b) Se $a_n = \mathfrak{m}(\Delta_n)$, mostre que:

$$a_n = a_{n-1} \int_0^1 (1 - t)^{n-1}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(t),$$

para todo $n \geq 1$.

(c) Determine $\mathfrak{m}(\Delta_n)$.

CAPÍTULO 3

O Teorema de Mudança de Variáveis para Integrais de Lebesgue

3.1. O Efeito de Aplicações Lipschitzianas sobre a Medida de Lebesgue

3.1.1. NOTAÇÃO. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, escrevemos:

$$\|x\|_\infty = \max\big\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\big\},$$

e para $x, y \in \mathbb{R}^n$, escrevemos:

$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max\big\{|x_i - y_i| : i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Claramente se B é um cubo n-dimensional com aresta a (veja Definição 1.4.22) então $d_\infty(x, y) \le a$, para todos $x, y \in B$. Provamos agora a seguinte recíproca para essa afirmação:

3.1.2. LEMA. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $a \ge 0$ tais que $d_\infty(x, y) \le a$, para todos $x, y \in A$. Então A está contido em um cubo n-dimensional de aresta a; em particular:*

$$\mathfrak{m}^*(A) \le a^n.$$

DEMONSTRAÇÃO. Se A é vazio, não há nada para se mostrar. Senão, seja $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a projeção sobre a i-ésima coordenada e considere o conjunto $A_i = \pi_i(A)$. Temos $|t - s| \le a$, para todos $t, s \in A_i$ e portanto $\sup A_i - \inf A_i \le a$; se $a_i = \inf A_i$, segue que:

$$A_i \subset [a_i, a_i + a]$$

e portanto:

$$A \subset \prod_{i=1}^n A_i \subset \prod_{i=1}^n [a_i, a_i + a]. \qquad \square$$

3.1.3. DEFINIÇÃO. Seja $\phi : X \to \mathbb{R}^n$ uma função definida num subconjunto X de $\mathbb{R}^m$. Dizemos que ϕ é *Lipschitziana* se existe uma constante $k \ge 0$ tal que:

$$d_\infty\big(\phi(x), \phi(y)\big) \le k\, d_\infty(x, y),$$

para todos $x, y \in X$. A constante k é dita uma *constante de Lipschitz* para a função ϕ.

Claramente toda função Lipschitziana é (uniformemente) contínua.

3.1.4. Lema. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto enumerável $\mathcal{R}$ de cubos n-dimensionais tal que $A \subset \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$ e $\sum_{B\in\mathcal{R}} |B| \le \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.4.12 existe um aberto U em $\mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}(U) \le \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon$ e pelo Lema 1.4.23 existe um conjunto enumerável $\mathcal{R}$ de cubos n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos tal que $U = \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$. Daí:

$$\sum_{B\in\mathcal{R}} |B| = \mathfrak{m}(U) \le \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon. \qquad \square$$

3.1.5. Proposição. *Seja $\phi : X \to \mathbb{R}^n$ uma função Lipschitziana com constante de Lipschitz $k \ge 0$, onde X é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Então, para todo subconjunto A de X, temos:*

$$\mathfrak{m}^*\big(\phi(A)\big) \le k^n \mathfrak{m}^*(A).$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ então, pelo Lema 3.1.4 existe um conjunto enumerável $\mathcal{R}$ de cubos n-dimensionais tal que $A \subset \bigcup_{B\in\mathcal{R}} B$ e:

$$\sum_{B\in\mathcal{R}} |B| \le \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon. \tag{3.1.1}$$

Daí $\phi(A) \subset \bigcup_{B\in\mathcal{R}} \phi(B \cap X)$ e portanto:

$$\mathfrak{m}^*\big(\phi(A)\big) \le \sum_{B\in\mathcal{R}} \mathfrak{m}^*\big(\phi(B\cap X)\big). \tag{3.1.2}$$

Fixado um cubo $B \in \mathcal{R}$ então, se a denota a aresta de B, temos:

$$d_\infty\big(\phi(x), \phi(y)\big) \le k\, d_\infty(x, y) \le ka,$$

para todos $x, y \in B \cap X$. Segue do Lema 3.1.2 que:

$$\mathfrak{m}^*\big(\phi(B \cap X)\big) \le (ka)^n = k^n |B|. \tag{3.1.3}$$

De (3.1.1), (3.1.2) e (3.1.3) vem:

$$\mathfrak{m}^*\big(\phi(A)\big) \le k^n \sum_{B\in\mathcal{R}} |B| \le k^n\big(\mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon\big).$$

A conclusão segue fazendo $\varepsilon \to 0$. $\square$

3.1.6. Corolário. *Se $\phi : X \to \mathbb{R}^n$ é uma função Lipschitziana definida num subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ então ϕ leva subconjuntos de X de medida nula em subconjuntos de medida nula de $\mathbb{R}^n$.* $\square$

3.1.7. Observação. Recorde que toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é Lipschitziana. Mais explicitamente, se a *norma* da aplicação linear T é definida por:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_\infty \le 1} \|T(x)\|_\infty, \tag{3.1.4}$$

então:

$$\|T(x)\|_\infty \le \|T\|\|x\|_\infty,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$, donde segue facilmente que $\|T\|$ é uma constante de Lipschitz para T. A finitude do supremo em (3.1.4) segue, por exemplo, do fato que a aplicação $x \mapsto \|T(x)\|_\infty$ é contínua e a bola $\big\{x : \|x\|_\infty \le 1\big\}$ é compacta.

3.1.8. COROLÁRIO. *Uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ leva subconjuntos de medida nula de $\mathbb{R}^n$ em subconjuntos de medida nula de $\mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Corolário 3.1.6 e da Observação 3.1.7. □

3.1.9. COROLÁRIO. *Todo subespaço vetorial próprio de $\mathbb{R}^n$ tem medida nula.*

DEMONSTRAÇÃO. Se V é um subespaço vetorial próprio de $\mathbb{R}^n$ então existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $T\big(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\big) = V$; de fato, podemos escolher uma aplicação linear T que leva os $n-1$ primeiros vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ sobre uma base qualquer de V (note que $\dim(V) \le n-1$). A conclusão segue do Corolário 1.4.7 e do Corolário 3.1.8. □

3.1.10. DEFINIÇÃO. Uma função $\phi : X \to \mathbb{R}^n$ definida num subconjunto X de $\mathbb{R}^m$ é dita *localmente Lipschitziana* se todo $x \in X$ possui uma vizinhança V em $\mathbb{R}^m$ tal que a função $\phi|_{V \cap X}$ é Lipschitziana.

3.1.11. PROPOSIÇÃO. *Se $\phi : X \to \mathbb{R}^n$ é uma função localmente Lipschitziana definida num subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ então ϕ leva subconjuntos de X de medida nula em subconjuntos de medida nula de $\mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para cada $x \in X$ seja U_x um aberto em $\mathbb{R}^n$ contendo x tal que a restrição de ϕ a $U_x \cap X$ seja Lipschitziana. A cobertura aberta $X \subset \bigcup_{x \in X} U_x$ possui uma subcobertura enumerável $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{x_i}$. Agora, dado qualquer subconjunto A de X com $\mathfrak{m}(A) = 0$, segue do Corolário 3.1.6 que:

$$\mathfrak{m}\big(\phi(U_{x_i} \cap A)\big) = 0,$$

para todo i. A conclusão é obtida agora da igualdade:

$$\phi(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \phi(U_{x_i} \cap A). \qquad \square$$

3.1.12. PROPOSIÇÃO. *Seja $\phi : X \to \mathbb{R}^n$ uma função localmente Lipschitziana definida num subconjunto X de $\mathbb{R}^n$. Então, para todo subconjunto mensurável A de $\mathbb{R}^n$ contido em X, temos que $\phi(A)$ é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Como A é mensurável, pelo Corolário 1.4.31, existe um subconjunto W de $\mathbb{R}^n$ de tipo F_σ com $W \subset A$ e $\mathfrak{m}(A \setminus W) = 0$; temos então que $A = W \cup N$, onde W é um F_σ e $N = A \setminus W$ tem medida nula. Como ϕ é localmente Lipschitziana então ϕ é localmente contínua e portanto contínua; daí ϕ leva compactos em compactos. Como W é uma união enumerável de fechados e todo fechado é uma união enumerável de compactos, segue que W é uma união enumerável de compactos; portanto também $\phi(W)$ é uma união enumerável de compactos. Temos então:

$$\phi(A) = \phi(W) \cup \phi(N),$$

onde $\phi(W)$ é um F_σ e $\phi(N)$ (é mensurável e) tem medida nula, pela Proposição 3.1.11. □

3.1.13. COROLÁRIO. *Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear então T leva subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ em subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue da Observação 3.1.7 e da Proposição 3.1.12. □

3.2. O Efeito de Aplicações Lineares sobre a Medida de Lebesgue

O objetivo desta seção é provar o seguinte:

3.2.1. TEOREMA. *Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear. Para todo subconjunto mensurável A de $\mathbb{R}^n$ temos que $T(A)$ é mensurável e:*

$$\mathfrak{m}\big(T(A)\big) = |\det T|\, \mathfrak{m}(A). \tag{3.2.1}$$

Em (3.2.1) denotamos por $\det T$ o *determinante* de T, ou seja, o determinante da matriz que representa T na base canônica de $\mathbb{R}^n$. No que segue, *sempre identificaremos aplicações lineares de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ com as respectivas matrizes $n \times m$ que as representam com respeito às bases canônicas.*

O restante da seção é dedicado à demonstração do Teorema 3.2.1. Note que a mensurabilidade de $T(A)$ já é garantida pelo Corolário 3.1.13. Note também que se T não é inversível então o Teorema 3.2.1 segue do Corolário 3.1.9, já que a imagem de T é um subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$ e $\det T = 0$. Se T é inversível, a estratégia da prova do Teorema 3.2.1 é a seguinte. Inicialmente, observamos que se $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são aplicações lineares tais que a igualdade (3.2.1) vale para $T = T_1$ e para $T = T_2$, para todo subconjunto mensurável A de $\mathbb{R}^n$, então a igualdade (3.2.1) também vale para $T = T_1 T_2$; de fato, dado $A \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, temos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}\big((T_1T_2)(A)\big) = |\det T_1|\, \mathfrak{m}\big(T_2(A)\big) &= |\det T_1|\,|\det T_2|\, \mathfrak{m}(A)\\ &= |\det(T_1T_2)|\, \mathfrak{m}(A).\end{aligned}$$

A seguir, selecionamos alguns tipos de aplicações lineares que chamaremos de *elementares*; mostraremos então que a igualdade (3.2.1) vale para aplicações lineares elementares e que toda aplicação linear inversível pode ser escrita como um produto de aplicações lineares elementares.

3.2.2. DEFINIÇÃO. Uma aplicação linear $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita *elementar* quando é de um dos seguintes tipos:

tipo 1. $E = L_{i,j;c}$, onde $i, j = 1, \ldots, n$ são distintos, $c \in \mathbb{R}$ e:

$$L_{i,j;c}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_i + cx_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n); \tag{3.2.2}$$

tipo 2. $E = \widehat{\sigma}$, onde $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ é uma bijeção e:

$$\widehat{\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}); \tag{3.2.3}$$

tipo 3. $E = D_\lambda$, onde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n$ e:

$$D_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n). \tag{3.2.4}$$

Obviamente as expressões (3.2.2), (3.2.3) e (3.2.4) definem isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^n$; em (3.2.2) escrevemos a definição de $L_{i,j;c}$ assumindo que $i < j$, mas obviamente uma fórmula análoga define $L_{i,j;c}$ se $i > j$. O efeito da multiplicação à esquerda de uma matriz T por uma matriz que representa uma aplicação linear elementar E nos dá o que chamamos de uma *transformação elementar* de matrizes; mais explicitamente, se T é uma matriz $n \times n$ cujas linhas são vetores $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathbb{R}^n$ e se E é uma aplicação linear elementar então ET é a matriz cujas linhas são:

- $\ell_1, \ldots, \ell_i + c\ell_j, \ldots, \ell_j, \ldots, \ell_n$, se $E = L_{i,j;c}$;
- $\ell_{\sigma(1)}, \ldots, \ell_{\sigma(n)}$, se $E = \widehat{\sigma}$;
- $\lambda_1\ell_1, \ldots, \lambda_n\ell_n$, se $E = D_\lambda$.

As transformações elementares de matrizes associadas à multicação à esquerda por uma aplicação elementar de tipos 1, 2 e 3 serão respectivamente chamadas de *transformações elementares de tipos 1, 2 e 3*.

O seguinte resultado é padrão em textos elementares de Álgebra Linear.

3.2.3. Lema. *Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear inversível então existe uma seqüência finita de transformações elementares de matrizes que leva T até a matriz identidade.*

Demonstração. Fazemos uma descrição sucinta do algorítmo que é conhecido como *escalonamento* de matrizes. Em primeiro lugar, como T é inversível então algum elemento da primeira coluna de T é não nulo; realizando uma transformação elementar de tipo 2, podemos assumir que o elemento T_{11} é não nulo e depois realizando uma transformação elementar de tipo 3 podemos assumir que $T_{11} = 1$. Agora, uma seqüência de $n - 1$ transformações elementares de tipo 1 nos permite anular os elementos T_{j1}, com $j = 2, \ldots, n$. Nesse ponto, a primeira coluna de T coincide com o primeiro vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$; daí a submatriz de T obtida removendo a primeira linha e a primeira coluna é inversível e podemos portanto repetir o algorítmo recursivamente na mesma. Obteremos então uma matriz T triangular superior em que todos os elementos da diagonal são iguais a 1. Podemos agora realizar uma seqüência de $\frac{n(n-1)}{2}$ transformações elementares de tipo 1 para anular os elementos de T que estão acima da diagonal, obtendo assim a matriz identidade. □

3.2.4. Corolário. *Toda aplicação linear inversível $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um produto de aplicações lineares elementares.*

Demonstração. Segue do Lema 3.2.3 que existem aplicações lineares elementares $E_1, \ldots, E_k$ de modo que $E_1 \cdots E_k T$ é igual à matriz identidade.

Daí $T = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}$. A conclusão segue da observação simples de que a inversa de uma aplicação linear elementar é novamente uma aplicação linear elementar (de mesmo tipo). $\square$

Em vista do Corolário 3.2.4 e das observações feitas anteriormente nesta seção, temos que a demonstração do Teorema 3.2.1 ficará concluída assim que demonstrarmos o seguinte:

3.2.5. LEMA. *Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear elementar então a igualdade* (3.2.1) *vale para todo subconjunto mensurável A de $\mathbb{R}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se T é de tipo 2 ou 3 então a tese do lema segue respectivamente dos resultados dos Exercícios 1.11 e 1.12 (note que as aplicações lineares elementares de tipo 2 tem determinante igual a ± 1). Resta então considerar o caso em que T é uma aplicação linear elementar de tipo 1. É fácil verificar que se $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ é uma bijeção então:

$$\widehat{\sigma}^{-1} L_{i,j;c}\, \widehat{\sigma} = L_{\sigma(i),\sigma(j);c},$$

para todos $i, j = 1, \ldots, n$ distintos e todo $c \in \mathbb{R}$. Podemos então reduzir a demonstração do lema apenas ao caso em que $T = L_{n,1;c}$, $c \in \mathbb{R}$. No que segue, identificamos $\mathbb{R}^n$ com o produto $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e usamos a notação da Seção 2.8; a aplicação T escreve-se na forma:

$$T(x, y) = (x, y + cx_1), \quad x \in \mathbb{R}^{n-1},\ y \in \mathbb{R}.$$

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ então para todo $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, a fatia vertical $T(A)_x$ do conjunto $T(A)$ coincide com a translação $A_x + cx_1$ da fatia vertical A_x de A. Se A é mensurável, temos que $T(A)$ também é mensurável (vide Corolário 3.1.13); segue então da Proposição 2.8.3 que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}\big(T(A)\big) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathfrak{m}\big(T(A)_x\big)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathfrak{m}(A_x + cx_1)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathfrak{m}(A_x)\, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \mathfrak{m}(A),\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos o Lema 1.4.10. Como T é uma matriz triangular com elementos da diagonal iguais a 1, temos que $\det T = 1$ e portanto a igualdade (3.2.1) fica demonstrada. $\square$

3.3. O Teorema de Mudança de Variáveis

Nesta seção nós provaremos o Teorema de Mudança de Variáveis para integais de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Para um entendimento completo do conteúdo desta seção serão necessários alguns conhecimentos básicos de Cálculo no $\mathbb{R}^n$, sobre os quais fazemos uma rápida revisão na Seção 3.4.

O enunciado do teorema é o seguinte:

3.3.1. TEOREMA (mudança de variáveis). *Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação* injetora *de classe C^1 definida num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$; suponha que a diferencial $\mathrm{d}\phi(x)$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$, para todo $x \in U$. Dados* *um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$ contido em U e uma função mensurável $f : \phi(A) \to \overline{\mathbb{R}}$ então:*

- *o conjunto $\phi(A)$ é mensurável;*
- *a função:*

$$A \ni y \longmapsto f\big(\phi(y)\big)\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \in \overline{\mathbb{R}} \tag{3.3.1}$$

  é mensurável;
- *a função f é quase integrável se e somente se a função (3.3.1) é quase integrável e, nesse caso, vale a igualdade:*

$$\int_{\phi(A)} f(x)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_A f\big(\phi(y)\big)\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y). \tag{3.3.2}$$

Note que, pelo Teorema da Função Inversa (Teorema 3.4.7), as hipóteses sobre ϕ no enunciado do Teorema 3.3.1 são equivalentes à condição de que $\phi(U)$ seja aberto em $\mathbb{R}^n$ e que $\phi : U \to \phi(U)$ seja um difeomorfismo C^1. Note também que a mensurabilidade de $\phi(A)$ é garantida pela Proposição 3.1.12, já que $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ é uma função localmente Lipschitziana (veja Corolário 3.4.5).

Para demonstrar o Teorema 3.3.1, precisamos de alguns lemas preparatórios.

3.3.2. Lema. *Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e suponha que a diferencial $\mathrm{d}\phi(x)$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$, para todo $x \in U$. Então, para todo subconjunto mensurável E de $\mathbb{R}^n$ temos que $\phi^{-1}(E)$ é mensurável; em outras palavras, a função:*

$$\phi : \big(U, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_U\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\big)$$

é mensurável.

Demonstração. Pelo Teorema da Função Inversa (Teorema 3.4.7), cada $x \in U$ possui uma vizinhança aberta U_x contida em U tal que $\phi(U_x)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\phi|_{U_x} : U_x \to \phi(U_x)$ é um difeomorfismo C^1. Daí a função $\psi_x = (\phi|_{U_x})^{-1} : \phi(U_x) \to U_x$ é localmente Lipschitziana (veja Corolário 3.4.5) e portanto, pela Proposição 3.1.12, o conjunto

$$\psi_x\big(E \cap \phi(U_x)\big) = \phi^{-1}\big(E \cap \phi(U_x)\big) \cap U_x = \phi^{-1}(E) \cap U_x$$

é mensurável, para todo $x \in U$. A cobertura aberta $U = \bigcup_{x\in U} U_x$ possui uma subcobertura enumerável $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{x_i}$ e portanto:

$$\phi^{-1}(E) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \big(\phi^{-1}(E) \cap U_{x_i}\big),$$

donde segue que $\phi^{-1}(E)$ é mensurável. □

3.3.3. Corolário. *Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que a diferencial $\mathrm{d}\phi(x)$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$, para todo $x \in U$. Dados um subconjunto A de U, um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$*

e uma função mensurável $f : \phi(A) \to X$ então a função $f \circ \phi|_A : A \to X$ é mensurável.

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que $f \circ \phi|_A$ é igual à composta das funções mensuráveis:

$$\begin{aligned} \phi|_A : \big(A, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_A\big) &\longrightarrow \big(\phi(A), \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_{\phi(A)}\big), \\ f : \big(\phi(A), \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)|_{\phi(A)}\big) &\longrightarrow (X, \mathcal{A}). \end{aligned}$$

□

3.3.4. LEMA. *Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e suponha que a diferencial $\mathrm{d}\phi(y_0)$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$, para um certo $y_0 \in U$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança aberta V de y_0 contida em U tal que para todo conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$ contido em V temos que $\phi(A)$ é mensurável e vale a desigualdade:*

$$\mathfrak{m}\big(\phi(A)\big) \le (1+\varepsilon) \int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y). \tag{3.3.3}$$

DEMONSTRAÇÃO. Em primeiro lugar, observe que a mensurabilidade de $\phi(A)$ segue da Proposição 3.1.12, já que ϕ é localmente Lipschitziana (veja Corolário 3.4.5). Seja $\varepsilon' > 0$ tal que:

$$(1+\varepsilon')^{n+1} \le 1 + \varepsilon.$$

Denote por T a diferencial de ϕ no ponto y_0. Como $T^{-1} \circ \mathrm{d}\phi(y_0)$ é igual à aplicação identidade e como a função $y \mapsto \|T^{-1} \circ \mathrm{d}\phi(y)\|$ é contínua, segue que:

$$\big\|T^{-1} \circ \mathrm{d}\phi(y)\big\| < 1 + \varepsilon', \tag{3.3.4}$$

para todo y em uma vizinhança suficientemente pequena de y_0. Usando também a continuidade da função $y \mapsto \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|$, vemos que:

$$\big|\det \mathrm{d}\phi(y_0)\big| < (1+\varepsilon')\,\big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|, \tag{3.3.5}$$

para todo y em uma vizinhança suficientemente pequena de y_0. Seja V uma bola aberta centrada em y_0 contida em U tal que (3.3.4) e (3.3.5) valem para todo $y \in V$. Seja A um subconjunto mensurável de V e provemos (3.3.3). Usando o Teorema 3.2.1, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}\big(\phi(A)\big) = \mathfrak{m}\big(TT^{-1}\phi(A)\big) &= |\det T|\, \mathfrak{m}\big(T^{-1}\phi(A)\big) \\ &= \big|\det \mathrm{d}\phi(y_0)\big|\, \mathfrak{m}\big(T^{-1}\phi(A)\big). \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Para todo $y \in V$, segue da regra da cadeia (veja Corolário 3.4.2) que:

$$\big\|\mathrm{d}(T^{-1} \circ \phi)(y)\big\| = \big\|T^{-1} \circ \mathrm{d}\phi(y)\big\| < 1 + \varepsilon',$$

e portanto, pela desigualdade do valor médio (veja Corolário 3.4.4), a função $T^{-1} \circ \phi|_V$ é Lipschitziana com constante de Lipschitz $1 + \varepsilon'$. Usando a Proposição 3.1.5, obtemos:

$$\mathfrak{m}\big(T^{-1}\phi(A)\big) \le (1+\varepsilon')^n \mathfrak{m}(A). \tag{3.3.7}$$

De (3.3.5), obtemos:

$$
\begin{aligned}
(3.3.8) \qquad \big|\det \mathrm{d}\phi(y_0)\big|\,\mathfrak{m}(A) &= \int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y_0)\big|\chi_A(y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\\
&\le (1+\varepsilon')\int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y).
\end{aligned}
$$

De (3.3.6), (3.3.7) e (3.3.8), vem:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{m}\big(\phi(A)\big) \le (1+\varepsilon')^n\big|\det \mathrm{d}\phi(y_0)\big|\,\mathfrak{m}(A) &\le (1+\varepsilon')^{n+1}\int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)\\
&\le (1+\varepsilon)\int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y). \qquad \square
\end{aligned}
$$

3.3.5. Lema. *Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e suponha que a diferencial $\mathrm{d}\phi(y)$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$, para todo $y \in U$. Então, dado um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$ contido em U, temos que $\phi(A)$ é mensurável e vale a desigualdade:*

$$
\mathfrak{m}\big(\phi(A)\big) \le \int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y).
$$

Demonstração. Seja dado $\varepsilon > 0$. Pelo Lema 3.3.4, todo ponto $y_0 \in U$ possui uma vizinhança aberta V_{y_0} contida em U com a seguinte propriedade: se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável contido em V_{y_0} então $\phi(A)$ é mensurável e vale a desigualdade (3.3.3). Da cobertura aberta $U = \bigcup_{y\in U} V_y$, podemos extrair uma subcobertura enumerável $U = \bigcup_{i=1}^\infty V_{y_i}$. Para cada $i \ge 1$, definimos:

$$
W_i = \begin{cases} V_{y_i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_{y_j}, & \text{se } i \ge 2,\\ V_{y_1}, & \text{se } i = 1,\end{cases}
$$

de modo que $U = \bigcup_{i=1}^\infty W_i$, cada W_i é mensurável (não necessariamente aberto), $W_i \subset V_{y_i}$ e os conjuntos W_i são dois a dois disjuntos. Agora, dado um conjunto mensurável arbitrário $A \subset \mathbb{R}^n$ contido em U, temos:

$$
\phi(A) = \bigcup_{i=1}^\infty \phi(A \cap W_i).
$$

Como $A \cap W_i$ é um subconjunto mensurável de V_{y_i}, segue que $\phi(A \cap W_i)$ é mensurável e vale a desigualdade:

$$
\mathfrak{m}\big(\phi(A\cap W_i)\big) \le (1+\varepsilon)\int_{A\cap W_i} \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y).
$$

Vemos então que $\phi(A)$ é mensurável e além disso:

$$\mathfrak{m}\big(\phi(A)\big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}\big(\phi(A \cap W_i)\big) \le (1+\varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A\cap W_i} \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)$$
$$= (1+\varepsilon) \int_A \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y),$$

onde na última igualdade usamos o resultado do Exercício 2.14. A conclusão final é obtida agora fazendo $\varepsilon \to 0$. □

3.3.6. Corolário. *Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e suponha que a diferencial $\mathrm{d}\phi(y)$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$, para todo $y \in U$. Então, dado um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$ contido em U e uma função mensurável $f : \phi(A) \to [0, +\infty]$ temos que $\phi(A)$ é mensurável, a função* (3.3.1) *é mensurável e vale a desigualdade:*

$$\int_{\phi(A)} f(x) \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \le \int_A f\big(\phi(y)\big) \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y). \tag{3.3.9}$$

Demonstração. Note que a mensurabilidade da função (3.3.1) segue do Corolário 3.3.3. Para provar a desigualdade (3.3.9), suponhamos inicialmente que $f : \phi(A) \to [0, +\infty]$ é simples e mensurável. Então podemos escrever:

$$f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{E_i},$$

onde $c_i \in [0, +\infty]$ e E_i é um subconjunto mensurável de $\phi(A)$, para todo $i = 1, \dots, k$. Seja $A_i = \phi^{-1}(E_i) \cap A$, de modo que A_i é mensurável (veja Lema 3.3.2) e $\phi(A_i) = E_i$. Segue do Lema 3.3.5 que:

$$\mathfrak{m}(E_i) = \mathfrak{m}\big(\phi(A_i)\big) \le \int_{A_i} \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y),$$

para $i = 1, \dots, k$ e portanto:

$$\int_{\phi(A)} f(x) \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathfrak{m}(E_i) \le \sum_{i=1}^{k} c_i \int_{A_i} \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} c_i \int_A \chi_{E_i}\big(\phi(y)\big) \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y)$$
$$= \int_A f\big(\phi(y)\big) \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y).$$

Demonstramos então a desigualdade (3.3.9) no caso em que f é simples e mensurável. Seja agora $f : \phi(A) \to [0, +\infty]$ uma função mensurável arbitrária. Temos que existe uma seqüência $(f_k)_{k\ge1}$ de funções simples e mensuráveis $f_k : \phi(A) \to [0, +\infty]$ tal que $f_k \nearrow f$; daí:

$$\int_{\phi(A)} f_k(x) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) \leq \int_A f_k\big(\phi(y)\big) \, \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y),$$

para todo $k \geq 1$. A desigualdade (3.3.9) é obtida agora fazendo $k \to \infty$ e usando o Teorema da Convergência Monotônica. $\square$

Prova do Teorema 3.3.1. Começamos supondo que f é não negativa. A mensurabilidade de $\phi(A)$ e da função (3.3.1) já foram estabelecidas no Corolário 3.3.6. Já temos também a desigualdade (3.3.9). A desigualdade oposta segue da aplicação do próprio Corolário 3.3.6 num contexto diferente. Recorde que, pelo Teorema da Função Inversa (Teorema 3.4.7), $\phi(U)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\phi : U \to \phi(U)$ é um difeomorfismo C^1; aplicamos então o Corolário 3.3.6 ao difeomorfismo inverso $\psi = \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}^n$, à função $g : A \to [0, +\infty]$ definida por:

$$g(y) = f\big(\phi(y)\big) \, \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|, \quad y \in A,$$

e ao conjunto mensurável $B = \phi(A) \subset \phi(U)$. Obtemos a desigualdade:

$$\int_{\psi(B)} g(y) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \leq \int_B g\big(\psi(x)\big) \, \big|\det \mathrm{d}\psi(x)\big| \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x). \tag{3.3.10}$$

Temos (veja (3.4.2)):

$$g\big(\psi(x)\big) \, \big|\det \mathrm{d}\psi(x)\big| = f(x) \, \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \, \big|\det \mathrm{d}(\phi^{-1})\big(\phi(y)\big)\big| = f(x),$$

onde $y = \phi^{-1}(x)$. Daí (3.3.10) nos dá:

$$\int_A f\big(\phi(y)\big) \, \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y) \leq \int_{\phi(A)} f(x) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x),$$

provando (3.3.2). Finalmente, se $f : \phi(A) \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável arbitrária então:

$$\int_{\phi(A)} f^+(x) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_A f^+\big(\phi(y)\big) \, \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y), \tag{3.3.11}$$

$$\int_{\phi(A)} f^-(x) \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(x) = \int_A f^-\big(\phi(y)\big) \, \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big| \, \mathrm{d}\mathfrak{m}(y); \tag{3.3.12}$$

a conclusão segue subtraindo (3.3.12) de (3.3.11), tendo em mente que as funções:

$$A \ni y \longmapsto f^+\big(\phi(y)\big) \, \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|, \quad A \ni y \longmapsto f^-\big(\phi(y)\big) \, \big|\det \mathrm{d}\phi(y)\big|$$

são respectivamente a parte positiva e a parte negativa da função (3.3.1). $\square$

3.4. Apêndice à Seção 3.3: recordação de Cálculo no $\mathbb{R}^n$

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma função. Recorde que ϕ é dita *diferenciável* num ponto $x \in U$ se existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que (recorde Notação 3.1.1):

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x) - T(h)}{\|h\|_\infty} = 0; \tag{3.4.1}$$

essa aplicação linear é única quando existe e é dada por:

$$T(v) = \lim_{t \to 0} \frac{\phi(x+tv) - \phi(x)}{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \phi}{\partial v}(x),$$

para todo $v \in \mathbb{R}^m$. A aplicação linear T é chamada a *diferencial* de ϕ no ponto x e é denotada por $\mathrm{d}\phi(x)$. A matriz que representa a diferencial $\mathrm{d}\phi(x)$ com respeito às bases canônicas é chamada a *matriz Jacobiana* de ϕ no ponto x. No que segue, *usaremos a mesma notação para a diferencial* $\mathrm{d}\phi(x)$ *e para a matriz Jacobiana de* ϕ *no ponto* x. Temos:

$$\mathrm{d}\phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix},$$

onde $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ e $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x)$ denota a derivada parcial no ponto x da função coordenada ϕ_i com respeito à j-ésima variável. Se uma aplicação ϕ é diferenciável num ponto x então ϕ é contínua nesse ponto.

Intuitivamente, (3.4.1) diz que $T = \mathrm{d}\phi(x)$ é uma "boa aproximação linear" para ϕ numa vizinhança de x. Mais explicitamente, quando o ponto $x \in \mathbb{R}^m$ sofre um deslocamento (vetorial) Δx então o ponto $y = \phi(x) \in \mathbb{R}^n$ sofre um deslocamento (vetorial) $\Delta y = \phi(x + \Delta x) - \phi(x)$ e a diferenciabilidade de ϕ no ponto x nos diz que Δy é aproximadamente uma função linear de Δx; mais precisamente, existe uma aplicação linear $\mathrm{d}\phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} T$, tal que Δy difere de $T(\Delta x)$ por uma quantidade que vai a zero mais rápido que $\|\Delta x\|_\infty$, quando $\Delta x \to 0$.

Quando uma aplicação $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ definida num aberto U de $\mathbb{R}^m$ é diferenciável em todos os pontos de U dizemos simplesmente que ela é *diferenciável* em U; dizemos que ϕ é *de classe* C^1 em U se ϕ é diferenciável em U e se a função $U \ni x \mapsto \mathrm{d}\phi(x)$ é contínua. Sabe-se que *uma função* ϕ *é de classe* C^1 *num aberto* U *se e somente se as derivadas parciais* $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, *existem e são contínuas em todos os pontos* $x \in U$.

Enunciamos agora alguns teoremas básicos de Cálculo no $\mathbb{R}^n$ que usamos na Seção 3.3.

3.4.1. Teorema (regra da cadeia). *Sejam* $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, $\psi : V \to \mathbb{R}^p$ *funções tais que* $\phi(U) \subset V$, *onde* U *é um aberto de* $\mathbb{R}^m$ *e* V *é um aberto de* $\mathbb{R}^n$. *Se* ϕ *é diferenciável num ponto* $x \in U$ *e* ψ *é diferenciável no ponto* $\phi(x)$

então a função composta $\psi \circ \phi$ é diferenciável no ponto x e sua diferencial é dada por:

$$\mathrm{d}(\psi \circ \phi)(x) = \mathrm{d}\psi\big(\phi(x)\big) \circ \mathrm{d}\phi(x).$$

Segue diretamente da definição de diferenciabilidade que toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $\mathbb{R}^m$ e $\mathrm{d}T(x) = T$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Dessa observação e da regra da cadeia obtemos:

3.4.2. Corolário. *Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, diferenciável num ponto $x \in U$. Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é uma aplicação linear então $T \circ \phi$ é diferenciável no ponto x e sua diferencial é dada por:*

$$\mathrm{d}(T \circ \phi)(x) = T \circ \mathrm{d}\phi(x). \qquad \square$$

Para o teorema a seguir, o leitor deve recordar a Notação 3.1.1 e a Observação 3.1.7, onde definimos a norma de uma aplicação linear.

3.4.3. Teorema (desigualdade do valor médio). *Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e sejam fixados dois pontos $x, y \in U$. Suponha que a função ϕ é contínua em todos os pontos do* segmento de reta fechado*:*

$$[x, y] = \big\{x + \theta(y - x) : 0 \le \theta \le 1\big\}$$

e é diferenciável em todos os pontos do segmento de reta aberto*:*

$$]x, y[= \big\{x + \theta(y - x) : 0 < \theta < 1\big\}.$$

Então existe $\theta \in \,]0, 1[$ tal que vale a desigualdade:

$$\|\phi(y) - \phi(x)\|_\infty \le \big\|\mathrm{d}\phi\big(x + \theta(y - x)\big)\big\| \|y - x\|_\infty.$$

Recorde que um subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ é dito *convexo* se para todos $x, y \in X$ o segmento de reta $[x, y]$ está contido em X.

3.4.4. Corolário. *Sejam $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e suponha que ϕ é diferenciável em todos os pontos de um subconjunto convexo X de U. Se existe $k \ge 0$ tal que $\|\mathrm{d}\phi(x)\| \le k$, para todo $x \in X$ então a função $\phi|_X$ é Lipschitziana com constante de Lipschitz k.* $\square$

3.4.5. Corolário. *Uma função $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é localmente Lipschitziana.*

Demonstração. Segue do Corolário 3.4.4, observando que a função $x \mapsto \|\mathrm{d}\phi(x)\|$ é contínua e portanto limitada numa bola suficientemente pequena centrada num ponto dado $x \in U$. $\square$

3.4.6. Definição. Se $U, V \subset \mathbb{R}^n$ são abertos então um *difeomorfismo* de U para V é uma bijeção diferenciável $\phi : U \to V$ cuja inversa $\phi^{-1} : V \to U$ também é diferenciável. Dizemos que $\phi : U \to V$ é um *difeomorfismo* C^1 se ϕ é bijetora e se ϕ e ϕ^{-1} são ambas de classe C^1.

Se $\phi : U \to V$ é um difeomorfismo então segue da regra da cadeia que para todo $x \in U$ a diferencial $\mathrm{d}\phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ cujo inverso é dado por:

$$\big(\mathrm{d}\phi(x)\big)^{-1} = \mathrm{d}(\phi^{-1})\big(\phi(x)\big). \tag{3.4.2}$$

Temos a seguinte recíproca para essa afirmação:

3.4.7. TEOREMA (da função inversa). *Seja $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $x \in U$ é tal que a diferencial* $\mathrm{d}\phi(x)$ *é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ então existe uma vizinhança aberta U_0 de x contida em U tal que $\phi(U_0)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\phi|_{U_0} : U_0 \to \phi(U_0)$ é um difeomorfismo C^1. Além do mais, se* $\mathrm{d}\phi(x)$ *é um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ para todo $x \in U$ então:*

- *ϕ é uma* aplicação aberta*, i.e., ϕ leva subconjuntos abertos de U em subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$;*
- *se U_0 é um aberto qualquer contido em U tal que $\phi|_{U_0}$ é injetora então $\phi|_{U_0} : U_0 \to \phi(U_0)$ é um difeomorfismo C^1.*

Exercícios para o Capítulo 3

O Efeito de Aplicações Lineares sobre a Medida de Lebesgue.

EXERCÍCIO 3.1. Dados pontos $p_1, \ldots, p_{n+1} \in \mathbb{R}^n$, então o *simplexo* de vértices $p_1, \ldots, p_{n+1}$ é definido por:

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{n+1} a_i p_i : a_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n+1,\ \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1 \Big\}. \tag{3.4.3}$$

Mostre que o simplexo (3.4.3) é mensurável e determine uma expressão para a sua medida de Lebesgue.

O Teorema de Mudança de Variáveis.

EXERCÍCIO 3.2. Dados $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, mostre que o disco:

$$\big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2 \big\}$$

é mensurável e determine sua medida de Lebesgue.

EXERCÍCIO 3.3. Considere a aplicação $\phi : \,]0, +\infty[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\theta),$$

para todos $\rho \in \,]0, +\infty[$, $\theta \in \mathbb{R}$.

- Calcule $\det \mathrm{d}\phi(\rho, \theta)$.
- Se $A = \,]0, 1] \times [0, 4\pi]$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denota a função constante e igual a 1, calcule as integrais:
$$\int_{\phi(A)} f(x, y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x, y), \qquad \int_A \big| \det \mathrm{d}\phi(\rho, \theta) \big| \,\mathrm{d}\mathfrak{m}(\rho, \theta).$$
- Explique o que está acontecendo, em vista do Teorema 3.3.1.

EXERCÍCIO 3.4. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $p = (p_1, \ldots, p_{n+1})$ um ponto de $\mathbb{R}^{n+1}$ com $p_{n+1} \neq 0$. Identifiquemos $\mathbb{R}^{n+1}$ com o produto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. O *cone de base A e vértice p* é definido por:

$$C(A, p) = \bigcup_{x \in A} [(x, 0), p] = \big\{ (x, 0) + t\big(p - (x, 0)\big) : x \in A,\ t \in [0, 1] \big\}.$$

Considere a função $\phi : \mathbb{R}^n \times \left]0,1\right[\to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por:

$$\phi(x,t) = (x,0) + t\big(p - (x,0)\big),$$

para todos $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \left]0,1\right[$. Mostre que:

- ϕ é injetora, de classe C^1 e $\det \mathrm{d}\phi(x,t) = (1-t)^n p_{n+1}$, para todos $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \left]0,1\right[$;
- se A é mensurável então o cone $C(A,p)$ é mensurável e sua medida de Lebesgue é dada por:

$$\mathfrak{m}\big(C(A,p)\big) = \frac{\mathfrak{m}(A)|p_{n+1}|}{n+1}.$$

EXERCÍCIO 3.5. Mostre que:

$$\Big(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)\Big)^2 = \int_Q e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x,y),$$

onde $Q = \left[0,+\infty\right[\times \left[0,+\infty\right[$; use essa identidade, juntamente com uma mudança de variáveis apropriada, para calcular a integral $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(x)$.

CAPÍTULO 4

Alguns Tópicos de Análise Funcional

Neste capítulo supõe-se que o leitor tenha familiaridade com conceitos básicos da teoria dos espaços métricos.

4.1. Espaços Normados e com Produto Interno

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ denota o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos.

4.1.1. DEFINIÇÃO. Uma *semi-norma* em E é uma aplicação:

$$E \ni x \longmapsto \|x\| \in \mathbb{R}$$

satisfazendo as seguintes condições:

(a) $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in E$;
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todo $x \in E$;
(c) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$, para todos $x, y \in E$ (*desigualdade triangular*).

Uma *norma* em E é uma semi-norma que satisfaz a condição adicional:

(d) $\|x\| > 0$, para todo $x \in E$ com $x \neq 0$.

Um *espaço vetorial normado sobre* $\mathbb{K}$ (ou, mais abreviadamente, um *espaço normado*) é um par $(E, \|\cdot\|)$, onde E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\|\cdot\|$ é uma norma em E.

Note que fazendo $\lambda = 0$ na condição (b) obtemos:

$$\|0\| = 0.$$

Dado um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$, nós definimos:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \tag{4.1.1}$$

para todos $x, y \in E$. Temos que $d : E \times E \to \mathbb{R}$ é uma métrica em E; de fato, segue das condições (a) e (d) que, para todos $x, y \in E$, $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = 0$ se e somente $x = y$. Usando a condição (b), obtemos:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \big\|(-1) \cdot (y - x)\big\| = \|y - x\| = d(y, x),$$

e usando a condição (c) obtemos:

$$d(x, z) = \|x-z\| = \big\|(x-y)+(y-z)\big\| \leq \|x-y\|+\|y-z\| = d(x, y)+d(y, z),$$

para todos $x, y, z \in E$. Dizemos que a métrica d definida em (4.1.1) é a métrica *associada* à (ou *determinada* pela) norma $\|\cdot\|$. *Nós sempre assumiremos que um espaço normado* $(E, \|\cdot\|)$ *está munido da métrica* d *associada* *a sua norma*. Temos então que todo espaço normado é também um espaço métrico (para uma recíproca, veja o Exercício 4.3).

4.1.2. Definição. Um *espaço de Banach sobre* $\mathbb{K}$ é um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$ sobre $\mathbb{K}$ tal que a métrica associada à norma $\|\cdot\|$ é completa.

4.1.3. Exemplo. Dado um conjunto arbitrário X, então o conjunto $\mathbb{K}^X$ de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$ possui uma estrutura natural de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ definida por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

para todos $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathbb{K}^X$. O conjunto $\mathrm{Bd}(X, \mathbb{K})$ de todas as funções limitadas $f : X \to \mathbb{K}$ é um subespaço de $\mathbb{K}^X$ e a aplicação $\|\cdot\|_{\mathrm{sup}} : \mathrm{Bd}(X, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\|f\|_{\mathrm{sup}} = \sup_{x \in X} \big|f(x)\big|,$$

para toda $f \in \mathrm{Bd}(X, \mathbb{K})$ é uma norma em $\mathrm{Bd}(X, \mathbb{K})$. A norma $\|\cdot\|_{\mathrm{sup}}$ é chamada a *norma do supremo* e a métrica d_{sup} associada a $\|\cdot\|_{\mathrm{sup}}$ é chamada a *métrica do supremo*. Temos que uma seqüência $(f_n)_{n \ge 1}$ em $\mathrm{Bd}(X, \mathbb{K})$ converge para uma função $f \in \mathrm{Bd}(X, \mathbb{K})$ (resp., é de Cauchy) com respeito à métrica d_{sup} se e somente se $(f_n)_{n \ge 1}$ converge uniformemente para f (resp., é uniformemente de Cauchy). Se $(f_n)_{n \ge 1}$ é uma seqüência uniformemente de Cauchy então $(f_n)_{n \ge 1}$ também é pontualmente de Cauchy e portanto existe $f : X \to \mathbb{K}$ tal que $(f_n)_{n \ge 1}$ converge para f pontualmente; segue do resultado do Exercício 2.36 que $(f_n)_{n \ge 1}$ converge para f uniformemente. Se todas as funções f_n são limitadas, é fácil ver que f também é limitada, e portanto a métrica d_{sup} é completa e $\mathrm{Bd}(X, \mathbb{K})$ é um espaço de Banach. Se X é um espaço métrico (ou, mais geralmente, um espaço topológico) então o conjunto $C_{\mathrm{b}}(X, \mathbb{K})$ de todas as funções contínuas e limitadas $f : X \to \mathbb{K}$ é um subespaço de $\mathrm{Bd}(X, \mathbb{K})$; como o limite uniforme de funções contínuas é contínua, segue que $C_{\mathrm{b}}(X, \mathbb{K})$ é fechado em $\mathrm{Bd}(X, \mathbb{K})$ e portanto também completo com a métrica (induzida por) d_{sup}. Segue que $C_{\mathrm{b}}(X, \mathbb{K})$ também é um espaço de Banach munido da norma (induzida por) $\|\cdot\|_{\mathrm{sup}}$. Note que se X é compacto então toda função contínua $f : X \to \mathbb{K}$ é limitada, de modo que $C_{\mathrm{b}}(X, \mathbb{K})$ coincide com o espaço $C(X, \mathbb{K})$ de todas as funções contínuas $f : X \to \mathbb{K}$.

4.1.4. Definição. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um *produto interno* em E é uma aplicação:

$$E \times E \ni (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$$

satisfazendo as seguintes condições:

(a) $\langle \lambda x + x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ e $\langle x, \lambda y + y' \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$, para todos $x, y, x', y' \in E$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$, onde $\bar{\lambda}$ denota o complexo conjugado de λ;
(b) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, para todos $x, y \in E$;
(c) $\langle x, x \rangle > 0$, para todo $x \in E$ com $x \neq 0$.

Note que a condição (b) implica que $\langle x, x\rangle$ é real, para todo $x \in E$, de modo que faz sentido falar em $\langle x, x\rangle > 0$, na condição (c). Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ então $\bar{\lambda} = \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, de modo que as condições (a) e (b) podem ser substituídas respectivamente por:

(a') $\langle \lambda x + x', y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$ e $\langle x, \lambda y + y'\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle$, para todos $x, y, x', y' \in E$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$;

(b') $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, para todos $x, y \in E$.

Fazendo $\lambda = 1$ na condição (a) obtemos:

$$\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle, \quad \langle x, y + y'\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y'\rangle,$$

para todos $x, y, x', y' \in E$; daí:

$$\langle 0, y\rangle = \langle 0 + 0, y\rangle = \langle 0, y\rangle + \langle 0, y\rangle, \quad \langle x, 0\rangle = \langle x, 0 + 0\rangle = \langle x, 0\rangle + \langle x, 0\rangle$$

e portanto:

$$\langle x, 0\rangle = 0, \quad \langle 0, y\rangle = 0,$$

para todos $x, y \in E$. Fazendo $x' = 0$, $y' = 0$ na condição (a) obtemos então:

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \quad \langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle,$$

para todos $x, y \in E$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

O primeiro resultado não trivial sobre produtos internos que provaremos é o seguinte:

4.1.5. Lema (desigualdade de Cauchy–Schwarz). *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ um produto interno em E. Então:*

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \le \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}, \tag{4.1.2}$$

para todos $x, y \in E$; a igualdade em (4.1.2) *vale se e somente se x e y são linearmente dependentes.*

Demonstração. Se x e y são linearmente dependentes então ou $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$, para algum $\lambda \in \mathbb{K}$; daí é fácil ver que vale a igualdade em (4.1.2). Suponhamos então que x e y são linearmente independentes e provemos que vale a desigualdade estrita em (4.1.2). Provemos primeiramente que:

$$\big|\Re\langle x, y\rangle\big| < \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}, \tag{4.1.3}$$

onde $\Re\lambda$ denota a parte real de um número complexo λ. Considere a função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$p(t) = \langle x + ty, x + ty\rangle,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos:

$$p(t) = \langle x, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t\langle y, x\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\Re\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Como x e y são linearmente independentes, temos que $x+ty$ é não nulo, para todo $t \in \mathbb{R}$ e portanto $p(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Mas p é uma função polinomial do segundo grau e portanto seu discriminante:

$$\Delta = 4\big(\Re\langle x, y\rangle\big)^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

deve ser negativo. Daí (4.1.3) segue diretamente. Seja agora $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| = 1$ tal que $\lambda\langle x, y\rangle$ é real[1]; trocando x por λx em (4.1.3) obtemos:

$$\big|\Re\langle \lambda x, y\rangle\big| < \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}},$$

donde segue a desigualdade:

$$\big|\langle x, y\rangle\big| < \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}. \qquad \square$$

4.1.6. Corolário. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ um produto interno em E. Então a aplicação $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}, \tag{4.1.4}$$

para todo $x \in E$, é uma norma em E.

Demonstração. Note que, como $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in E$, a aplicação $\|\cdot\|$ está bem definida e $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in E$; além do mais, $\|x\| > 0$, para $x \in E$ não nulo. Dados $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$, temos:

$$\|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{\frac{1}{2}} = \big(\lambda\bar{\lambda}\langle x, x\rangle\big)^{\frac{1}{2}} = \big(|\lambda|^2\langle x, x\rangle\big)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|x\|.$$

Finalmente, a desigualdade triangular é obtida da desigualdade de Cauchy–Schwarz, através dos cálculos abaixo:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\big|\langle x, y\rangle\big| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2,\end{aligned}$$

onde $x, y \in E$. $\square$

A norma definida em (4.1.4) é chamada a norma *associada ao* (ou *determinada pelo*) produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

4.1.7. Definição. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ um produto interno em E. O par $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é chamado um *espaço pré-Hilbertiano sobre* $\mathbb{K}$. Se a métrica associada à norma associada ao produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ for completa, dizemos que $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um *espaço de Hilbert sobre* $\mathbb{K}$.

Nós sempre assumiremos que um espaço pré-Hilbertiano $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ está munido da norma (4.1.4) *associada ao seu produto interno.* Vemos então que todo espaço pré-Hilbertiano é um espaço normado e todo espaço de Hilbert é um espaço de Banach. Nem toda norma está associada a um produto interno, como segue facilmente do seguinte:

4.1.8. Lema (identidade do paralelogramo). *Se E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno em E e $\|\cdot\|$ é a norma associada a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ então:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big), \tag{4.1.5}$$

[1] Dado um número complexo z, evidentemente existe um número complexo λ de módulo 1 tal que λz é real; basta tomar $\lambda = \frac{\bar{z}}{|z|}$, se $z \neq 0$ e $\lambda = 1$ se $z = 0$.

para todos $x, y \in E$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle,$$

donde:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\langle x,y\rangle; \tag{4.1.6}$$

similarmente:

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\Re\langle x,y\rangle. \tag{4.1.7}$$

A conclusão é obtida somando (4.1.6) e (4.1.7). □

No Exercício 4.10 pedimos ao leitor para mostrar que a norma do supremo não satisfaz a identidade do paralelogramo (exceto pelo caso trivial, em que o domínio tem um único ponto). Vemos então que nem toda norma está associada a um produto interno. No Exercício 4.14 apresentamos um leitor um roteiro para demonstrar que toda norma que satisfaz a identidade do paralelogramo está associada a um único produto interno.

Se F é um subconjunto fechado não vazio de $\mathbb{R}^n$ e K é um subconjunto compacto não vazio de $\mathbb{R}^n$ então existem pontos $x \in F$, $y \in K$ tais que $d(x,y) = d(F,K)$, ou seja, a distância mínima entre F e K é explicitamente realizada[2]. Como é ilustrado no exemplo a seguir, se (M,d) é um espaço métrico arbitrário, $F \neq \emptyset$ é fechado em M e $K \neq \emptyset$ é um subconjunto compacto de M, não é verdade em geral que a distância mínima entre F e K é realizada, mesmo sob a hipótese que o espaço métrico M seja completo (é verdade, no entanto, que se K e F são disjuntos então $d(K,F) > 0$).

4.1.9. EXEMPLO. Seja $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ o espaço de Banach das funções contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ munido da norma do supremo (veja Exemplo 4.1.3) e seja E o subespaço de $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ constituído pelas funções contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tais que $f(0) = f(1) = 0$. Claramente E é um subespaço fechado de $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ e portanto é também um espaço de Banach. Seja H o subconjunto de E definido por:

$$H = \big\{ f \in E : \textstyle\int_0^1 f \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = 1 \big\}.$$

Se uma seqüência $(f_n)_{n\geq 1}$ em $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ converge uniformemente para f então (veja Exercício 2.26):

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \int_0^1 f \,\mathrm{d}\mathfrak{m},$$

donde segue que H é fechado em E. Vamos mostrar que a distância

$$d_{\sup}(0,H) = \inf_{f\in H} \|f\|_{\sup}$$

[2]Esse não é o caso se supusermos apenas que F e K são fechados. Por exemplo, se $F = \big\{ \big(x, \frac{1}{x}\big) : x > 0 \big\}$ e $K = \mathbb{R} \times \{0\}$ então F e K são fechados e disjuntos em $\mathbb{R}^2$, mas $d(K,F) = 0$.

da função nula até H é igual a 1, mas que não existe nenhuma função $f \in H$ com $d_{\rm sup}(0,f) = \|f\|_{\rm sup} = 1$. Em primeiro lugar, mostremos que não existe $f \in H$ com $\|f\|_{\rm sup} \le 1$. De fato, suponha por absurdo que $f \in H$ e $\|f\|_{\rm sup} \le 1$. Daí $1 - f \ge 0$ e $\int_0^1 (1-f)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = 0$, donde $f = 1$ quase sempre; mas $f(0) = f(1) = 0$ e a continuidade de f implicam que f é menor que 1 numa vizinhança de $\{0,1\}$, o que nos dá uma contradição. Vamos agora mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $f \in H$ com $\|f\|_{\rm sup} \le 1+\varepsilon$. Obviamente podemos supor sem perda de generalidade que $\varepsilon \le 1$; seja $\eta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \in \left]0, \frac12\right]$ e considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\varepsilon}{\eta}\, x, & \text{se } 0 \le x \le \eta,\\ 1+\varepsilon, & \text{se } \eta \le x \le 1-\eta,\\ \frac{1+\varepsilon}{\eta}\,(1-x), & \text{se } 1-\eta \le x \le 1. \end{cases}$$

É fácil ver que $f \in H$ e que $\|f\|_{\rm sup} = 1+\varepsilon$. Logo $d_{\rm sup}(0,H) = 1$, mas não existe $f \in H$ com $\|f\|_{\rm sup} = 1$.

4.1.10. Proposição. *Seja $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço pré-Hilbertiano sobre $\mathbb{K}$ e seja $C \subset E$ um subconjunto completo, não vazio, tal que $\frac12(p+q) \in C$, para todos $p, q \in C$. Então para todo $x \in E$ existe um único ponto $p \in C$ tal que $d(x,p) = d(x,C)$.*

Demonstração. Sejam $x \in E$, $p, q \in C$. Aplicando a identidade do paralelogramo (4.1.5) aos vetores $x-p$, $x-q$, obtemos:

$$\|2x - p - q\|^2 + \|p-q\|^2 = 2\big(\|x-p\|^2 + \|x-q\|^2\big),$$

e portanto:

$$\|p-q\|^2 = 2\Big(\|x-p\|^2 + \|x-q\|^2 - 2\big\|x - \tfrac12(p+q)\big\|^2\Big). \tag{4.1.8}$$

Seja $c = d(x,C) \ge 0$. Provemos primeiramente a unicidade de p. Se $p, q \in C$ são tais que $d(x,p) = d(x,q) = c$ então $d\big(x, \frac12(p+q)\big) \ge c$, de modo que (4.1.8) nos dá:

$$\|p-q\|^2 \le 2(c^2 + c^2 - 2c^2) = 0,$$

e daí $p = q$. Para provar a existência de p, seja $(p_n)_{n\ge1}$ uma seqüência em C tal que $d(x,p_n) < c + \frac1n$, para todo $n \ge 1$. Usando (4.1.8) com $p = p_n$, $q = p_m$ e observando que $d\big(x, \frac12(p_n+p_m)\big) \ge c$, obtemos:

$$\|p_n - p_m\|^2 < 2\Big[\big(c+\tfrac1n\big)^2 + \big(c+\tfrac1m\big)^2 - 2c^2\Big] = 2\big(\tfrac{2c}{n} + \tfrac{2c}{m} + \tfrac{1}{n^2} + \tfrac{1}{m^2}\big),$$

donde segue que $(p_n)_{n\ge1}$ é uma seqüência de Cauchy. Já que C é completo, existe $p \in C$ com $p_n \to p$ e daí fazendo $n \to \infty$ em $d(x,p_n) < c + \frac1n$ obtemos $d(x,p) \le c$. Como obviamente $d(x,p) \ge c$, a conclusão segue. □

4.1.11. Definição. Seja $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço pré-Hilbertiano sobre $\mathbb{K}$. Dois vetores $x, y \in E$ são ditos *ortogonais* se $\langle x, y\rangle = 0$. Seja S um subconjunto de E. O *complemento ortogonal* de S, denotado por $S^\perp$, é conjunto dos vetores $x \in E$ que são ortogonais a todos os vetores de S, isto é:

$$S^\perp = \big\{x \in E : \langle x, y\rangle = 0, \text{ para todo } y \in S\big\}.$$

É fácil ver que o complemento ortogonal de um subconjunto S de E coincide com o complemento ortogonal do subespaço vetorial de E gerado por S, de modo que a noção de complemento ortogonal é particularmente interessante apenas para subespaços vetoriais. É fácil ver também que o complemento ortogonal de um subconjunto arbitrário de E é sempre um subespaço de E.

4.1.12. Lema. *Sejam $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço pré-Hilbertiano sobre $\mathbb{K}$ e S um subespaço vetorial de E. Dados $x \in E$, $p \in S$, então $d(x,p) = d(x,S)$ se e somente se $x - p \in S^\perp$.*

Demonstração. Sejam $x \in E$, $p \in S$ e suponha que $x-p \in S^\perp$. Dado $q \in S$ então $p - q \in S$ e portanto os vetores $x - p$ e $p - q$ são ortogonais; pelo Teorema de Pitágoras (veja Exercício 4.15):

$$\|x-q\|^2 = \big\|(x-p) + (p-q)\big\|^2 = \|x-p\|^2 + \|p-q\|^2 \ge \|x-p\|^2,$$

donde $d(x,p) \le d(x,q)$, para todo $q \in S$. Isso mostra que $d(x,p) = d(x,S)$. Reciprocamente, suponha que $d(x,p) = d(x,S)$. Dado $v \in S$, considere a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\phi(t) = d(x, p+tv)^2 = \|(x-p) - tv\|^2,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\phi(t) = \|x-p\|^2 - 2t\Re\langle x-p, v\rangle + t^2\|v\|^2,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $d(x,p) = d(x,S)$, a função ϕ possui um mínimo global em $t = 0$ e portanto:

$$\phi'(0) = -2\Re\langle x-p, v\rangle = 0.$$

Concluímos que:

$$\Re\langle x-p, v\rangle = 0, \tag{4.1.9}$$

para todo $v \in S$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, a demonstração já está completa. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos trocar v por iv em (4.1.9), o que nos dá:

$$\Re\langle x-p, iv\rangle = -\Re\big(i\langle x-p, v\rangle\big) = \Im\langle x-p, v\rangle = 0,$$

onde $\Im\lambda$ denota a parte imaginária de um número complexo λ. Daí:

$$\langle x-p, v\rangle = 0$$

e a demonstração está completa. □

4.1.13. Definição. Sejam $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço pré-Hilbertiano sobre $\mathbb{K}$ e S um subespaço vetorial de E. Dado $x \in E$ então um ponto $p \in S$ com $x - p \in S^\perp$ é dito uma *projeção ortogonal* de x em S.

Temos que a projeção ortogonal de x em S é única quando existe; de fato, se $p, q \in S$ e $x - p, x - q \in S^\perp$ então $p - q = (x - q) - (x - p) \in S^\perp$ e $p - q \in S$, de modo que $\langle p - q, p - q \rangle = 0$ e $p - q = 0$.

4.1.14. COROLÁRIO. *Sejam $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço pré-Hilbertiano sobre $\mathbb{K}$ e S um subespaço vetorial de E. Suponha que S é completo (esse é o caso, por exemplo, se $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço de Hilbert e S é fechado em E). Então todo $x \in E$ admite uma (única) projeção ortogonal $p \in S$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue da Proposição 4.1.10 que existe $p \in S$ com $d(x, p) = d(x, S)$. O Lema 4.1.12 nos diz então que $x - p \in S^\perp$. $\square$

4.1.15. COROLÁRIO. *Sejam $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço pré-Hilbertiano sobre $\mathbb{K}$ e S um subespaço vetorial de E. Suponha que S é completo (esse é o caso, por exemplo, se $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço de Hilbert e S é fechado em E). Então $E = S \oplus S^\perp$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $v \in S \cap S^\perp$ então $\langle v, v \rangle = 0$, de modo que $v = 0$. O Corolário 4.1.14 implica que todo elemento de E é soma de um elemento de S com um elemento de $S^\perp$, i.e., $E = S + S^\perp$. A conclusão segue. $\square$

4.2. Aplicações Lineares Contínuas

4.2.1. LEMA. *Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \to F$ uma aplicação linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *T é contínua;*
(b) *T é contínua na origem;*
(c) *T é limitada em alguma vizinhança da origem, i.e., existem $c \geq 0$ e uma vizinhança V da origem em E tal que $\|T(x)\|_F \leq c$, para todo $x \in V$;*
(d) *T é limitada na bola unitária de E, i.e., existe $c \geq 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq c$, para todo $x \in E$ com $\|x\|_E$;*
(e) *T é limitada na esfera unitária de E, i.e., existe $c \geq 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq c$, para todo $x \in E$ com $\|x\|_E = 1$;*
(f) *existe $c \geq 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$, para todo $x \in E$;*
(g) *T é Lipschitziana.*

DEMONSTRAÇÃO.

- (a)⇒(b).
  Trivial.

- (b)⇒(c).
  Dado, por exemplo, $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que:
$$\big\|T(x) - T(0)\big\|_F = \big\|T(x)\big\|_F < \varepsilon,$$
para todo $x \in E$ com $\|x\|_E < \delta$. Daí T é limitada na bola aberta de centro na origem de E e raio δ.

- (c)$\Rightarrow$(d).
  Por hipótese, existem $r > 0$ e $c \geq 0$ tais que $\|T(x)\|_F \leq c$, para todo $x \in E$ com $\|x\|_E \leq r$. Daí, se $x \in E$ é tal que $\|x\|_E \leq 1$ então $\|rx\|_E \leq r$ e portanto $\|T(rx)\|_F \leq c$; logo $\|T(x)\|_F \leq \frac{c}{r}$, para todo $x \in E$ com $\|x\|_E \leq 1$.

- (d)$\Rightarrow$(e).
  Trivial.

- (e)$\Rightarrow$(f).
  Seja $c \geq 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq c$, para todo $x \in E$ com $\|x\|_E = 1$. Afirmamos que $\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$, para todo $x \in E$. De fato, se $x = 0$ essa desigualdade é trivial. Se $x \neq 0$, tomamos $y = \frac{x}{\|x\|_E}$, de modo que $\|y\|_E = 1$ e:
  $$\frac{\big\|T(x)\big\|_F}{\|x\|_E} = \big\|T(y)\big\|_F \leq c.$$
  A conclusão segue.

- (f)$\Rightarrow$(g).
  Seja $c \geq 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$, para todo $x \in E$. Dados, $x, y \in E$, então:
  $$\big\|T(x) - T(y)\big\|_F = \big\|T(x - y)\big\|_F \leq c\|x - y\|_E,$$
  de modo que c é uma constante de Lipschitz para T.

- (g)$\Rightarrow$(a).
  Trivial. □

4.2.2. Definição. Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação linear $T : E \to F$ é dita *limitada* se satisfaz uma das (e portanto todas as) condições equivalentes que aparecem no enunciado do Lema 4.2.1.

Normalmente, uma função f cujo contra-domínio é um espaço métrico é dita *limitada* quando sua imagem é um conjunto limitado. No caso de aplicações lineares, usamos a expressão “limitada” com um significado um pouco diferente, i.e., dizemos que uma aplicação linear entre espaços normados é limitada quando sua restrição à bola unitária do domínio é limitada no sentido mais usual da palavra. Esse uso ligeiramente ambíguo da palavra “limitada” é completamente usual e não causa confusão, já que uma aplicação linear não nula nunca pode ter imagem limitada (veja Exercício 4.16).

Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Denotamos por $\mathrm{Lin}(E, F)$ o conjunto de todas as aplicações lineares limitadas $T : E \to F$. Segue facilmente do resultado do Exercício 4.2 que $\mathrm{Lin}(E, F)$ é um subespaço vetorial do espaço de *todas* as aplicações lineares $T : E \to F$.

4.2.3. Definição. Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Se $T : E \to F$ é uma aplicação linear limitada então a *norma* de T é definida por:

$$\|T\| = \sup\big\{\|T(x)\|_F : x \in E \text{ e } \|x\|_E \le 1\big\} \in [0, +\infty[\,. \tag{4.2.1}$$

Quando o espaço E é não nulo, então a norma de uma aplicação linear $T : E \to F$ coincide com o supremo de $\|T(x)\|_F$ quando x percorre a esfera unitária de E (veja Exercício 4.17). Deixamos a cargo do leitor a verificação de que (4.2.1) define uma norma no espaço vetorial $\mathrm{Lin}(E, F)$ (veja Exercício 4.18).

4.2.4. Lema. *Sejam* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *espaços normados sobre* $\mathbb{K}$. *Então:*

$$\|T(x)\|_F \le \|T\|\|x\|_E, \tag{4.2.2}$$

para todos $T \in \mathrm{Lin}(E, F)$, $x \in E$. *Se* $(G, \|\cdot\|_G)$ *é um espaço normado sobre* $\mathbb{K}$ *e* $T \in \mathrm{Lin}(E, F)$, $S \in \mathrm{Lin}(F, G)$ *então:*

$$\|S \circ T\| \le \|S\|\|T\|.$$

Demonstração. Seja $x \in E$. Se $x = 0$, então a desigualdade (4.2.2) é trivial. Senão, seja $y = \frac{x}{\|x\|_E}$; temos $\|y\|_E = 1$ e portanto:

$$\frac{\big\|T(x)\big\|_F}{\|x\|_E} = \big\|T(y)\big\|_F \le \|T\|,$$

donde a desigualdade (4.2.2) segue. Seja $S \in \mathrm{Lin}(F, G)$; para todo $x \in E$ com $\|x\|_E \le 1$, temos:

$$\big\|(S \circ T)(x)\big\|_G = \big\|S\big(T(x)\big)\big\|_G \le \|S\|\big\|T(x)\big\|_F \le \|S\|\|T\|,$$

donde $\|S \circ T\| \le \|S\|\|T\|$. □

4.2.5. Proposição. *Sejam* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *espaços normados sobre* $\mathbb{K}$. *Se* $(F, \|\cdot\|_F)$ *é um espaço de Banach então também* $\mathrm{Lin}(E, F)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(T_n)_{n\ge1}$ uma seqüência de Cauchy em $\mathrm{Lin}(E, F)$. Para todo $x \in E$, temos:

$$\big\|T_n(x) - T_m(x)\big\|_F \le \|T_n - T_m\|\|x\|_E,$$

para todos $n, m \ge 1$; segue que $\big(T_n(x)\big)_{n\ge1}$ é uma seqüência de Cauchy em F. Como F é completo, podemos definir uma aplicação $T : E \to F$ fazendo:

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x),$$

para todo $x \in E$. Se $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então segue do resultado do Exercício 4.2 que:

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} \big(T_n(x) + T_n(y)\big) = T(x) + T(y),$$
$$T(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \big(\lambda T_n(x)\big) = \lambda T(x),$$

donde T é linear. Seja dado $\varepsilon > 0$. Vamos mostrar que existe $n_0 \geq 1$ tal que $T_n - T$ é limitada e $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$; seguirá daí automaticamente que T é limitada, já que $T = T_n - (T_n - T)$, com T_n e $T_n - T$ ambas limitadas. Como $(T_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy, existe $n_0 \geq 1$ tal que $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$, para todos $n, m \geq n_0$. Fixado $x \in E$ com $\|x\|_E \leq 1$ então:

$$\big\|T_n(x) - T_m(x)\big\|_F < \varepsilon;$$

fazendo $m \to \infty$ (com n e x fixados), obtemos:

$$\big\|T_n(x) - T(x)\big\|_F \leq \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$ e todo $x \in E$ com $\|x\|_E \leq 1$. Daí $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Isso mostra que $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ em $\mathrm{Lin}(E, F)$, o que completa a demonstração. □

4.2.6. Definição. Sejam E, F espaços vetoriais complexos. Uma aplicação $T : E \to F$ é dita *linear-conjugada* se:

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \text{e} \quad T(\lambda x) = \bar{\lambda} T(x),$$

para todos $x, y \in E$ e todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Se E, F são espaços vetoriais complexos e $T : E \to F$ é uma aplicação linear-conjugada então T é $\mathbb{R}$-linear, i.e., a aplicação $T : E|_{\mathbb{R}} \to F|_{\mathbb{R}}$ é linear, onde $E|_{\mathbb{R}}$, $F|_{\mathbb{R}}$ denotam as realificações dos espaços complexos E e F respectivamente (veja Definição 4.1). Obtemos daí o seguinte:

4.2.7. Lema. *O resultado do Lema 4.2.1 também vale se supusermos que* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *e que* $T : E \to F$ *é uma aplicação linear-conjugada.*

Demonstração. Basta aplicar o Lema 4.2.1 para a aplicação linear $T : E|_{\mathbb{R}} \to F|_{\mathbb{R}}$, observando que $\|\cdot\|_E$ e $\|\cdot\|_F$ também são normas nos espaços vetorais reais $E|_{\mathbb{R}}$ e $F|_{\mathbb{R}}$, respectivamente (veja Exercício 4.7). □

Dizemos que uma aplicação linear-conjugada $T : E \to F$ é *limitada* quando satisfaz uma das (e portanto todas as) condições equivalentes que aparecem no enunciado do Lema 4.2.1. Definimos então a *norma* de T como em (4.2.1). O Lema 4.2.4, a Proposição 4.2.5 e o resultado dos Exercícios 4.17 e 4.18 todos possuem versões correspondentes para aplicações lineares-conjugadas (e as correspondentes demonstrações são perfeitamente análogas às demonstrações das versões originais). Observamos também que uma aplicação linear-conjugada pode ser transformada em uma aplicação linear se trocarmos o sinal da estrutura complexa de seu domínio ou de seu contra-domínio (veja Exercícios 4.19, 4.20, 4.21 e 4.22). Tal observação permite obter de forma imediata as versões para aplicações lineares-conjugadas dos resultados que demonstramos sobre aplicações lineares.

4.2.8. DEFINIÇÃO. Seja $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e seja $T : E \to F$ uma aplicação linear (resp., linear conjugada). Dizemos que T é uma *imersão isométrica linear* (resp., *imersão isométrica linear-conjugada*) se:

$$\big\|T(x)\big\|_F = \|x\|_E, \tag{4.2.3}$$

para todo $x \in E$. Se, além do mais, T é sobrejetora, dizemos que T é uma *isometria linear* (resp., *isometria linear-conjugada*).

A condição (4.2.3) implica diretamente que $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, i.e., que T é injetora. Assim, toda isometria linear (resp., isometria linear conjugada) é bijetora e é fácil ver que sua inversa $T^{-1} : F \to E$ também é uma isometria linear (resp., isometria linear conjugada). Além do mais, é claro que toda imersão isométrica linear (e toda imersão isométrica linear-conjugada) T é limitada e que $\|T\| = 1$, a menos que seu domínio seja o espaço nulo.

4.3. Funcionais Lineares e o Espaço Dual

Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Por um *funcional linear* em E nós entendemos uma aplicação linear $\alpha : E \to \mathbb{K}$ cujo contra-domínio é o corpo de escalares $\mathbb{K}$. Um funcional linear $\alpha : E \to \mathbb{K}$ é dito *limitado* quando a aplicação linear $\alpha : E \to \mathbb{K}$ for limitada. O conjunto:

$$E^* = \big\{\alpha : \alpha \text{ é um funcional linear limitado em } E\big\} = \mathrm{Lin}(E, \mathbb{K})$$

é chamado o *espaço dual* de E. Como caso particular da Definição 4.2.3, nós temos:

$$\|\alpha\| = \sup\big\{|\alpha(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \le 1\big\}.$$

4.3.1. PROPOSIÇÃO. *Se $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ então seu dual E^* é um espaço de Banach.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue da Proposição 4.2.5, já que o corpo de escalares $\mathbb{K}$ é completo. □

Observamos que em álgebra linear normalmente define-se o dual (também chamado de *dual algébrico*) de um espaço vetorial E como sendo o espaço de *todos* os funcionais lineares em E. Por isso, o espaço dual que nós definimos acima é muitas vezes chamado o *dual topológico* de E. Nós não teremos nenhum uso para a noção de dual algébrico e portanto usamos "dual" como sinônimo de "dual topológico".

4.3.2. EXEMPLO. Seja $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço pré-Hilbertiano sobre $\mathbb{K}$. Para todo $v \in E$, a aplicação:

$$\alpha_v : E \ni x \longmapsto \langle x, v\rangle \in \mathbb{K}$$

é um funcional linear em E. Segue da desigualdade de Cauchy–Schwarz (Lema 4.1.5) que:

$$\big|\alpha_v(x)\big| \le \|v\|\|x\|,$$

donde vemos que α_v é limitado e $\|\alpha_v\| \le \|v\|$. Afirmamos que:

$$\|\alpha_v\| = \|v\|, \tag{4.3.1}$$

para todo $v \in E$. De fato, se $v = 0$, essa igualdade é trivial; senão, tomamos $w = \frac{v}{\|v\|}$, de modo que $\|w\| = 1$ e:

$$\|\alpha_v\| \ge \big|\alpha_v(w)\big| = \frac{\langle v, v\rangle}{\|v\|} = \|v\|,$$

provando (4.3.1). É fácil ver que:

$$\alpha_{v+w} = \alpha_v + \alpha_w, \quad \alpha_{\lambda v} = \bar{\lambda}\alpha_v,$$

para todos $v, w \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, donde segue que a aplicação:

$$E \ni v \longmapsto \alpha_v \in E^* \tag{4.3.2}$$

é linear para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e linear-conjugada para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. A igualdade (4.3.1) nos diz que a aplicação (4.3.2) é uma imersão isométrica linear para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e uma imersão isométrica linear-conjugada para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. A aplicação (4.3.2) é chamada a *aplicação de Riesz* do espaço pré-Hilbertiano E.

Temos o seguinte:

4.3.3. Teorema (de representação de Riesz). *Seja $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$. Então a aplicação de Riesz (4.3.2) é uma isometria linear para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e uma isometria linear-conjugada para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

A demonstração do Teorema 4.3.3 usa o seguinte:

4.3.4. Lema. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\alpha : E \to \mathbb{K}$ um funcional linear não nulo. Dado $x \in E$ com $\alpha(x) \ne 0$ então $\mathrm{Ker}(\alpha) \cup \{x\}$ é um conjunto de geradores para E.*

Demonstração. Seja $y \in E$; queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{K}$ e $n \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ com $y = n + \lambda x$. Basta então encontrar $\lambda \in \mathbb{K}$ com $y - \lambda x \in \mathrm{Ker}(\alpha)$; mas:

$$\alpha(y - \lambda x) = \alpha(y) - \lambda\alpha(x),$$

donde basta tomar $\lambda = \frac{\alpha(y)}{\alpha(x)}$. □

4.3.5. Corolário. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Dados funcionais lineares $\alpha : E \to \mathbb{K}$, $\beta : E \to \mathbb{K}$, se $\mathrm{Ker}(\alpha) \subset \mathrm{Ker}(\beta)$ então existe $\lambda \in \mathbb{K}$ com $\beta = \lambda\alpha$.*

Demonstração. Se $\alpha = 0$ então $\mathrm{Ker}(\alpha) = E = \mathrm{Ker}(\beta)$, donde $\beta = 0$ e basta tomar $\lambda = 0$. Se $\alpha \ne 0$, seja $x \in E$ com $\alpha(x) \ne 0$ e tome $\lambda = \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$. Temos que os funcionais lineares β e $\lambda\alpha$ coincidem em $\mathrm{Ker}(\alpha) \cup \{x\}$; segue então do Lema 4.3.4 que $\beta = \lambda\alpha$. □

Demonstração do Teorema 4.3.3. Seja $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{K}$. Já sabemos que a aplicação de Riesz (4.3.2) é uma imersão isométrica (linear para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e linear-conjugada para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), de modo que é suficiente demonstrar que ela é sobrejetora. Seja $\alpha \in E^*$ um funcional linear limitado em E. Devemos encontrar $v \in E$ com $\alpha = \alpha_v$. Se $\alpha = 0$, basta tomar $v = 0$. Suponha então que $\alpha \neq 0$. Como α é contínuo, temos que $\operatorname{Ker}(\alpha) = \alpha^{-1}(0)$ é um subespaço fechado de E, de modo que $E = \operatorname{Ker}(\alpha) \oplus \big(\operatorname{Ker}(\alpha)\big)^\perp$, pelo Corolário 4.1.15. Como $\alpha \neq 0$, temos $\operatorname{Ker}(\alpha) \neq E$ e portanto existe $x \in \big(\operatorname{Ker}(\alpha)\big)^\perp$ com $x \neq 0$. Vemos então que o funcional linear α_x é nulo em $\operatorname{Ker}(\alpha)$ e portanto, pelo Corolário 4.3.5, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ com $\alpha_x = \lambda\alpha$. Como $x \neq 0$, temos que $\alpha_x \neq 0$ e portanto $\lambda \neq 0$. Concluímos então que:

$$\alpha = \lambda^{-1}\alpha_x = \alpha_v,$$

onde $v = \bar{\lambda}^{-1}x \in E$. Isso completa a demonstração. □

4.4. Espaços L^p

Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dados uma função mensurável $f : X \to \mathbb{C}$ e $p \in [1, +\infty[$, nós definimos:

$$\|f\|_p = \Big(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty], \tag{4.4.1}$$

onde convencionamos que $(+\infty)^\alpha = +\infty$, para qualquer $\alpha > 0$. Note que $|f|^p : X \to [0, +\infty[$ é uma função mensurável, já que a função:

$$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \ni z \longmapsto |z|^p \in [0, +\infty[$$

é contínua e portanto Borel mensurável (veja Lema 2.1.15 e Corolário 2.1.17). Como a função $|f|^p$ é não negativa, segue que a integral em (4.4.1) sempre existe (sendo possivelmente igual a $+\infty$). Note que, pelo resultado do Exercício 2.21, temos:

$$\|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \text{ q. s.}. \tag{4.4.2}$$

4.4.1. Notação. Denotamos por $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : X \to \mathbb{K}$ tais que $\|f\|_p < +\infty$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Temos o seguinte:

4.4.2. Lema. *Dados um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $p \in [1, +\infty[$ então $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ é um subespaço do espaço vetorial (sobre $\mathbb{K}$) de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$.*

Demonstração. A função nula obviamente está em $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$. Dados uma função mensurável $f : X \to \mathbb{K}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então a função λf é mensurável e:

$$\|\lambda f\|_p = \Big(\int_X |\lambda f|^p \, \mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_X |\lambda|^p |f|^p \, \mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(|\lambda|^p \int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{p}},$$

donde:

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p. \tag{4.4.3}$$

Daí $\lambda f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ sempre que $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$. Para mostrar que $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ é fechado por somas, usamos a desigualdade:

$$(a+b)^p \le 2^p(a^p + b^p), \tag{4.4.4}$$

válida para quaisquer números reais não negativos a, b. Para provar (4.4.4), seja $c = \max\{a, b\}$, de modo que $c^p = \max\{a^p, b^p\}$ e $a + b \le c + c = 2c$; temos:

$$(a+b)^p \le (2c)^p = 2^p c^p \le 2^p(a^p + b^p).$$

Agora, dadas $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$, então:

$$|f+g|^p \le 2^p\big(|f|^p + |g|^p\big),$$

de modo que:

$$\int_X |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu \le 2^p\Big(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_X |g|^p \,\mathrm{d}\mu\Big) < +\infty,$$

e portanto $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$. □

Nosso próximo objetivo é estabelecer que $\|\cdot\|_p$ é uma semi-norma no espaço vetorial $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$.

4.4.3. Lema (desigualdade de Minkowski). *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e sejam $f : X \to \mathbb{C}$, $g : X \to \mathbb{C}$ funções mensuráveis. Dado $p \in [1, +\infty[$, então:*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{4.4.5}$$

4.4.4. Corolário. *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida e $p \in [1, +\infty[$ então $\|\cdot\|_p$ é uma semi-norma em $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$.*

Demonstração. Obviamente, $\|f\|_p$ é um número real não negativo, para toda $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$. Vimos em (4.4.3) que $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e toda $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$. Finalmente, a desigualdade triangular para $\|\cdot\|_p$ é exatamente a desigualdade de Minkowski (Lema 4.4.3). □

A prova da desigualdade de Minkowski tem alguma similaridade com a prova da desigualdade triangular para a norma (4.1.4) associada a um produto interno. Na prova da desigualdade triangular para a norma (4.1.4), utilizamos a desigualdade de Cauchy–Schwarz. Para provar a desigualdade de Minkowski, vamos usar o seguinte:

4.4.5. Lema (desigualdade de Hölder). *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e sejam $f : X \to \mathbb{C}$, $g : X \to \mathbb{C}$ funções mensuráveis. Dados $p, q \in \,]1, +\infty[$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então:*

$$\int_X |fg| \,\mathrm{d}\mu \le \|f\|_p \, \|g\|_q. \tag{4.4.6}$$

Supondo $\|f\|_p < +\infty$ *e* $\|g\|_q < +\infty$ *então a igualdade ocorre em* (4.4.6) *se e somente se existe* $\lambda \geq 0$ *tal que:*

(4.4.7) $$|g|^q = \lambda |f|^p \ \text{q. s.} \quad \text{ou} \quad |f|^p = \lambda |g|^q \ \text{q. s.}.$$

Vamos por um momento assumir a desigualdade de Hölder e demonstrar a desigualdade de Minkowski.

Demonstração do Lema 4.4.3. Se $p = 1$ então:

$$\|f+g\|_p = \int_X |f+g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X \big(|f| + |g|\big) \, \mathrm{d}\mu = \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu + \int_X |g| \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Suponha agora que $p > 1$ e seja $q = \frac{p}{p-1} \in \,]1, +\infty[$, de modo que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Temos:

(4.4.8) $$\begin{aligned} \big(\|f+g\|_p\big)^p = \int_X |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu &= \int_X |f+g|^{p-1} |f+g| \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_X |f+g|^{p-1} \big(|f| + |g|\big) \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_X |f||f+g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder (Lema 4.4.5), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_X |f||f+g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \, \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q &= \|f\|_p \Big(\int_X |f+g|^p \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_p \big(\|f+g\|_p\big)^{\frac{p}{q}}, \\ \int_X |g||f+g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu \leq \|g\|_p \, \big\||f+g|^{p-1}\big\|_q &= \|g\|_p \Big(\int_X |f+g|^p \Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|g\|_p \big(\|f+g\|_p\big)^{\frac{p}{q}}; \end{aligned}$$

daí:

(4.4.9) $$\int_X |f||f+g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1} \, \mathrm{d}\mu \leq \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big) \big(\|f+g\|_p\big)^{\frac{p}{q}}.$$

De (4.4.8) e (4.4.9) vem:

$$\big(\|f+g\|_p\big)^p \leq \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big) \big(\|f+g\|_p\big)^{\frac{p}{q}},$$

e:

(4.4.10) $$\|f+g\|_p \big(\|f+g\|_p\big)^{\frac{p}{q}} \leq \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big) \big(\|f+g\|_p\big)^{\frac{p}{q}}.$$

Se $0 < \|f+g\|_p < +\infty$ então (4.4.5) segue diretamente de (4.4.10). Se $\|f+g\|_p = 0$, a desigualdade (4.4.5) é trivial. Finalmente, se $\|f+g\|_p$ é igual a $+\infty$ então o Lema 4.4.2 implica que $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_p = +\infty$, donde a desigualdade (4.4.5) segue. □

Passemos à prova da desigualdade de Hölder. Precisamos do seguinte:

4.4.6. Lema (desigualdade entre as médias). *Dados $n \geq 1$, números reais positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ e números reais não negativos $x_1, \ldots, x_n$ então:*

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n. \tag{4.4.11}$$

A igualdade vale em (4.4.11) se e somente se $x_1 = \cdots = x_n$.

Demonstração. A prova deste lema usa algus fatos simples da teoria de funções convexas, que serão demonstrados na Seção 4.5. A função exponencial $\exp : \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ possui derivada segunda positiva e portanto é estritamente convexa (Corolário 4.5.14). Dados então números reais positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ e números reais $y_1, \ldots, y_n$, temos (Proposição 4.5.16):

$$\exp(\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n) \leq \alpha_1 \exp(y_1) + \cdots + \alpha_n \exp(y_n),$$

onde a igualdade vale se e somente se $y_1 = \cdots = y_n$. Se todos os x_i são positivos, a conclusão é obtida fazendo $y_i = \ln(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. O caso em que algum x_i é igual a zero é trivial, já que o lado esquerdo de (4.4.11) é zero e o lado direito de (4.4.11) é não negativo, sendo igual a zero se e somente se $x_1 = \cdots = x_n = 0$. $\square$

4.4.7. Corolário. *Sejam $p, q \in \,]1, +\infty[$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b \geq 0$. Então:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}; \tag{4.4.12}$$

a igualdade vale em (4.4.12) se e somente se $a^p = b^q$.

Demonstração. Use o Lema 4.4.6 com $n = 2$, $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$, $\alpha_1 = \frac{1}{p}$ e $\alpha_2 = \frac{1}{q}$. $\square$

Demonstração do Lema 4.4.5. Se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ então $f = 0$ q. s. ou $g = 0$ q. s. (veja (4.4.2)) e $\int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu = 0$, donde o resultado segue trivialmente. Suponhamos que $\|f\|_p > 0$ e $\|g\|_q > 0$. Se $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_q = +\infty$ então $\|f\|_p \, \|g\|_q = +\infty$, donde também o resultado é trivial. Podemos supor então que as normas $\|f\|_p$ e $\|g\|_q$ são positivas e finitas. Sendo $\|f\|_p$ e $\|g\|_q$ ambas positivas, vemos que a existência de $\lambda \geq 0$ tal que (4.4.7) vale é equivalente à existência de $\lambda > 0$ tal que $|g|^q = \lambda |f|^p$ q. s.; integrando essa igualdade dos dois lados, vem:

$$\lambda = \frac{\big(\|g\|_q\big)^q}{\big(\|f\|_p\big)^p},$$

donde a condição (4.4.7) é na verdade equivalente a:

$$\Big(\frac{|f|}{\|f\|_p}\Big)^p = \Big(\frac{|g|}{\|g\|_q}\Big)^q \text{ q. s.}. \tag{4.4.13}$$

Sejam:

$$\tilde{f} = \frac{|f|}{\|f\|_p}, \quad \tilde{g} = \frac{|g|}{\|g\|_q}.$$

A desigualdade de Hölder (4.4.6) é equivalente a:

$$\int_X \tilde{f}\tilde{g}\,\mathrm{d}\mu \le 1. \tag{4.4.14}$$

A igualdade (4.4.3) nos dá:

$$\|\tilde{f}\|_p = 1, \quad \|\tilde{g}\|_q = 1.$$

Usando o Corolário 4.4.7, obtemos:

$$\tilde{f}\tilde{g} \le \frac{\tilde{f}^p}{p} + \frac{\tilde{g}^q}{q}; \tag{4.4.15}$$

integrando, vem:

$$\int_X \tilde{f}\tilde{g}\,\mathrm{d}\mu \le \int_X \Big(\frac{\tilde{f}^p}{p} + \frac{\tilde{g}^q}{q}\Big)\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p}\big(\|\tilde{f}\|_p\big)^p + \frac{1}{q}\big(\|\tilde{g}\|_q\big)^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{4.4.16}$$

provando (4.4.14) (e também (4.4.6)). Temos que a igualdade em (4.4.6) é equivalente à igualdade em (4.4.14) que, por sua vez, é equivalente à afirmação que a desigualdade que aparece em (4.4.16) é uma igualdade; usando (4.4.15) e o resultado do Exercício 2.22, vemos então que a igualdade em (4.4.6) é equivalente a:

$$\tilde{f}\tilde{g} = \frac{\tilde{f}^p}{p} + \frac{\tilde{g}^q}{q} \text{ q.s.}. \tag{4.4.17}$$

Pelo Corolário 4.4.7, (4.4.17) é equivalente a:

$$\tilde{f}^p = \tilde{g}^q \text{ q.s.},$$

que, por sua vez, é equivalente a (4.4.13). Isso completa a demonstração. □

Em vista de (4.4.2), temos que $\|\cdot\|_p$ não é em geral uma norma em $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{K})$. Para obtermos um espaço normado, consideramos um quociente de $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{K})$ (veja Exercício 4.6). Considere o seguinte subespaço de $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{K})$:

(4.4.18)

$$\big\{f \in \mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{K}) : \|f\|_p = 0\big\} = \big\{f \in \mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{K}) : f = 0 \text{ q.s.}\big\}.$$

Denotamos por $L^p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{K})$ o espaço quociente de $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{K})$ por (4.4.18). Pelo resultado do Exercício 4.6, temos que a semi-norma $\|\cdot\|_p$ em $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{K})$ induz uma norma no espaço quociente $L^p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{K})$, de modo que a norma de uma classe de equivalência é igual à semi-norma de um representante qualquer da classe. Denotaremos essa norma em $L^p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{K})$ também por $\|\cdot\|_p$. Dada uma função f em $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{K})$ então a classe de equivalência de f em $L^p(X,\mathcal{A},\mu;\mathbb{K})$ é precisamente o conjunto de todas as funções mensuráveis $g : X \to \mathbb{K}$ que são iguais a f quase sempre. Nós em geral adotaremos o abuso de notação de denotar a classe de funções mensuráveis iguais a f quase sempre também por f; assim, nós diremos "seja $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$", onde f denotará uma função $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ (que é identificada com o elemento de $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ que é a classe de funções mensuráveis iguais a f quase sempre.

4.4.8. Proposição. *Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida e $p \in [1, +\infty[$ então o espaço normado $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ é completo e é portanto um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$.*

A demonstração da Proposição 4.4.8 usa os dois seguintes lemas.

4.4.9. Lema. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $p \in [1, +\infty[$. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de Cauchy em $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ que converge pontualmente quase sempre para uma função mensurável $f : X \to \mathbb{K}$. Então f está em $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ e $(f_n)_{n\geq 1}$ converge para f em $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $\|f_n - f\|_p \to 0$; de fato, isso implica em particular que $\|f_n - f\|_p < +\infty$ para n suficientemente grande, donde segue que $f_n - f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ e portanto também f está em $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$. Seja dado $\varepsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de Cauchy em $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$, existe $n_0 \geq 1$ tal que $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$, para todos $n, m \geq n_0$, isto é:

$$\int_X |f_n - f_m|^p \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon^p,$$

para todos $n, m \geq n_0$. Fixando $n \geq n_0$ e usando o Lema de Fatou (Proposição 2.5.2) para a seqüência $\big(|f_n - f_m|^p\big)_{m\geq 1}$, obtemos:

$$\int_X \liminf_{m\to\infty} |f_n - f_m|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{m\to\infty} \int_X |f_n - f_m|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon^p,$$

para todo $n \geq n_0$. Mas $f_m \to f$ q. s. implica que:

$$\liminf_{m\to\infty} |f_n - f_m|^p = |f_n - f|^p \text{ q. s.}$$

e portanto:

$$\int_X |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{m\to\infty} |f_n - f_m|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon^p,$$

para todo $n \geq n_0$. Isso prova que $\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$ e completa a demonstração. □

4.4.10. Lema. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $p \in [1, +\infty[$ e $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência em $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$. Se $(f_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy em $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ (resp., converge em $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ para f) então $(f_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy em medida (resp., converge para f em medida).*

DEMONSTRAÇÃO. A tese segue facilmente da seguinte observação: dadas funções mensuráveis $f, g : X \to \mathbb{K}$ então para todo $\varepsilon > 0$ vale a desigualdade:

$$\mu\Big(\big\{x \in X : \big|f(x) - g(x)\big| \geq \varepsilon\big\}\Big) \leq \frac{\big(\|f-g\|_p\big)^p}{\varepsilon^p}.$$

Para provar a observação, seja $A = \big\{x \in X : \big|f(x) - g(x)\big| \geq \varepsilon\big\}$; então:

$$\big(\|f-g\|_p\big)^p = \int_X |f-g|^p \,\mathrm{d}\mu \geq \int_A |f-g|^p \,\mathrm{d}\mu \geq \varepsilon^p \mu(A). \qquad \square$$

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.4.8. Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de Cauchy em $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$. Pelo Lema 4.4.10, a seqüência $(f_n)_{n\geq 1}$ também é de Cauchy em medida e portanto, pelo Lema 2.7.14, existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ que converge pontualmente quase sempre para uma função mensurável $f : X \to \mathbb{K}$. O Lema 4.4.9 nos diz então que f está em $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ e que $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge para f em $L^p(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$. A conclusão segue da seguinte observação elementar: se uma seqüência de Cauchy num espaço métrico possui uma subseqüência convergente então a própria seqüência de Cauchy também é convergente (para o mesmo limite). $\square$

4.5. Apêndice à Seção 4.4: funções convexas

4.5.1. DEFINIÇÃO. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *convexa* quando para todos $x, y \in I$ e todo $t \in [0,1]$ vale a desigualdade:

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y). \tag{4.5.1}$$

Dizemos que f é *estritamente convexa* quando para todos $x, y \in I$ com $x \neq y$ e todo $t \in \,]0,1[$ vale a desigualdade estrita:

$$f\big((1-t)x + ty\big) < (1-t)f(x) + tf(y). \tag{4.5.2}$$

Claramente a igualdade vale em (4.5.1) quando $x = y$ ou $t \in \{0,1\}$; além do mais, as desigualdades (4.5.1) e (4.5.2) não se alteram quando trocamos x por y e t por $1-t$. Vemos então que f é convexa (resp., estritamente convexa) se e somente se a desigualdade (4.5.1) (resp., a desigualdade estrita (4.5.2)) vale para todos $x, y \in I$ com $x < y$ e para todo $t \in \,]0,1[$. Evidentemente toda função estritamente convexa é convexa.

Geometricamente, a desigualdade (4.5.1) diz que o trecho do gráfico de f entre os pontos $\big(x, f(x)\big)$ e $\big(y, f(y)\big)$ está abaixo da correspondente reta secante. Vamos explorar algumas conseqüências da definição de convexidade. Dados $x, y \in I$ com $x \neq y$, vamos denotar por $\mathfrak{c}(f; x, y)$ o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $\big(x, f(x)\big)$ e $\big(y, f(y)\big)$; mais explicitamente:

$$\mathfrak{c}(f; x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \mathfrak{c}(f; y, x).$$

Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x < y$, temos uma bijeção estritamente crescente:

$$[0,1] \ni t \longmapsto w = (1-t)x + ty = x + t(y-x) \in [x, y], \tag{4.5.3}$$

cuja inversa é dada por:

$$[x,y] \ni w \longmapsto t = \frac{w-x}{y-x} \in [0,1].$$

Se $x, y \in I$, $x < y$ e $t \in [0,1]$, $w \in [x,y]$ estão relacionados por (4.5.3) então:

$$f\big((1-t)x + ty\big) \le (1-t)f(x) + tf(y) \Longleftrightarrow f(w) \le \frac{y-w}{y-x}f(x) + \frac{w-x}{y-x}f(y).$$

Note também que:

$$\begin{aligned}(4.5.4)\qquad \frac{y-w}{y-x}f(x) + \frac{w-x}{y-x}f(y) &= f(x) + \mathfrak{c}(f;x,y)(w-x)\\ &= f(y) + \mathfrak{c}(f;x,y)(w-y),\end{aligned}$$

para todo $w \in \mathbb{R}$. Vemos então que:

$$(4.5.5)\qquad \begin{aligned} f\big((1-t)x+ty\big) \le (1-t)f(x)+tf(y) &\Longleftrightarrow \mathfrak{c}(f;x,w) \le \mathfrak{c}(f;x,y)\\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{c}(f;x,y) \le \mathfrak{c}(f;w,y),\end{aligned}$$

e:

$$(4.5.6)\qquad \begin{aligned} f\big((1-t)x+ty\big) = (1-t)f(x)+tf(y) &\Longleftrightarrow \mathfrak{c}(f;x,w) = \mathfrak{c}(f;x,y)\\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{c}(f;x,y) = \mathfrak{c}(f;w,y),\end{aligned}$$

onde $x, y \in I$, $x < y$, e $t \in \,]0,1[$, $w \in \,]x,y[$ estão relacionados por (4.5.3). Observamos também que se $x, y, w \in I$, $x < w < y$ então existe $\theta \in \,]0,1[$ tal que:

$$(4.5.7)\qquad \mathfrak{c}(f;x,y) = (1-\theta)\mathfrak{c}(f;x,w) + \theta\mathfrak{c}(f;w,y);$$

de fato, basta tomar $\theta = \frac{y-w}{y-x}$. Segue de (4.5.7) que $\mathfrak{c}(f;x,y)$ pertence ao intervalo fechado de extremidades $\mathfrak{c}(f;x,w)$ e $\mathfrak{c}(f;w,y)$; levando em conta (4.5.5) e (4.5.6) vemos então também que:

$$(4.5.8)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{c}(f;x,w) \le \mathfrak{c}(f;x,y) &\Longleftrightarrow \mathfrak{c}(f;x,y) \le \mathfrak{c}(f;w,y)\\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{c}(f;x,w) \le \mathfrak{c}(f;w,y),\end{aligned}$$

e:

$$(4.5.9)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{c}(f;x,w) = \mathfrak{c}(f;x,y) &\Longleftrightarrow \mathfrak{c}(f;x,y) = \mathfrak{c}(f;w,y)\\ &\Longleftrightarrow \mathfrak{c}(f;x,w) = \mathfrak{c}(f;w,y).\end{aligned}$$

Temos então o seguinte:

4.5.2. Lema. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. As seguintes condições são equivalentes:*

- *f é convexa;*
- *$\mathfrak{c}(f;x,w) \le \mathfrak{c}(f;x,y)$, para todos $x, y, w \in I$ com $x < w < y$;*
- *$\mathfrak{c}(f;x,y) \le \mathfrak{c}(f;w,y)$, para todos $x, y, w \in I$ com $x < w < y$;*
- *$\mathfrak{c}(f;x,w) \le \mathfrak{c}(f;w,y)$, para todos $x, y, w \in I$ com $x < w < y$.*

Similarmente, são equivalentes as condições:

- *f é estritamente convexa;*
- *$\mathfrak{c}(f;x,w) < \mathfrak{c}(f;x,y)$, para todos $x, y, w \in I$ com $x < w < y$;*

- $\mathfrak{c}(f; x, y) < \mathfrak{c}(f; w, y)$, *para todos* $x, y, w \in I$ *com* $x < w < y$;
- $\mathfrak{c}(f; x, w) < \mathfrak{c}(f; w, y)$, *para todos* $x, y, w \in I$ *com* $x < w < y$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue de (4.5.5), (4.5.6), (4.5.8) e (4.5.9). □

Uma função convexa só deixa de ser estritamente convexa se for afim em algum trecho de seu domínio. Esse é o conteúdo do seguinte:

4.5.3. COROLÁRIO. *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função convexa num intervalo* $I \subset \mathbb{R}$. *Dados* $x, y \in I$ *com* $x < y$ *então são equivalentes:*
(a) *existe* $t \in \,]0, 1[$ *tal que* $f\big((1-t)x + ty\big) = (1-t)f(x) + tf(y)$;
(b) f *é* afim *no intervalo* $[x, y]$, *i.e., existem* $a, b \in \mathbb{R}$ *com* $f(w) = aw + b$, *para todo* $w \in [x, y]$;
(c) $f\big((1-t)x + ty\big) = (1-t)f(x) + tf(y)$, *para todo* $t \in [0, 1]$.

DEMONSTRAÇÃO.

- (a)⇒(b).
  Seja $t_0 \in \,]0, 1[$ com $f\big((1-t_0)x + t_0 y\big) = (1-t_0)f(x) + t_0 f(y)$ e seja $w_0 \in \,]x, y[$ relacionado com t_0 pela bijeção (4.5.3). Por (4.5.6), temos:

$$\mathfrak{c}(f; x, w_0) = \mathfrak{c}(f; x, y), \quad \mathfrak{c}(f; w_0, y) = \mathfrak{c}(f; x, y). \tag{4.5.10}$$

  O Lema 4.5.2 nos diz que as funções:

$$I \cap \,]x, +\infty[\, \ni w \longmapsto \mathfrak{c}(f; x, w), \quad I \cap \,]-\infty, y[\, \ni w \longmapsto \mathfrak{c}(f; w, y),$$

  são crescentes e portanto (4.5.10) implica que $\mathfrak{c}(f; x, w) = \mathfrak{c}(f; x, y)$, para todo $w \in [w_0, y]$ e que $\mathfrak{c}(f; w, y) = \mathfrak{c}(f; x, y)$, para todo $w \in [x, w_0]$. Daí:

$$f(w) = \mathfrak{c}(f; x, y)(w - x) + f(x),$$

  para todo $w \in [w_0, y]$ e:

$$f(w) = \mathfrak{c}(f; x, y)(w - y) + f(y) \overset{(4.5.4)}{=} \mathfrak{c}(f; x, y)(w - x) + f(x),$$

  para todo $w \in [x, w_0]$.

- (b)⇒(c).
  Temos:

$$\begin{aligned}(1-t)f(x) + tf(y) = (1-t)(ax + b) + t(ay + b) &= a\big((1-t)x + ty\big) + b \\ &= f\big((1-t)x + ty\big).\end{aligned}$$

- (c)⇒(a).
  Trivial. □

4.5.4. COROLÁRIO. *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função convexa num intervalo* $I \subset \mathbb{R}$. *Então* f *não é estritamente convexa se e somente se existem* $x, y \in I$ *e* $a, b \in \mathbb{R}$ *com* $x < y$ *e* $f(w) = aw + b$, *para todo* $w \in [x, y]$. □

Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $x \in I$ um ponto que não é a extremidade direita de I, denotamos por $\mathrm{d}^+ f(x)$ a *derivada à direita* de f no ponto x, definida por:

$$\mathrm{d}^+ f(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{y \to x^+} \mathfrak{c}(f; x, y) \in \overline{\mathbb{R}},$$

desde que esse limite exista em $\overline{\mathbb{R}}$. Similarmente, se $x \in I$ não é a extremidade esquerda de I, denotamos por $\mathrm{d}^- f(x)$ a *derivada à esquerda* de f no ponto x, definida por:

$$\mathrm{d}^- f(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{y \to x^-} \mathfrak{c}(f; x, y) \in \overline{\mathbb{R}},$$

desde que esse limite exista em $\overline{\mathbb{R}}$.

4.5.5. LEMA. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se $x \in I$ não é a extremidade direita então a derivada à direita $\mathrm{d}^+ f(x)$ existe em $\overline{\mathbb{R}}$ e vale a desigualdade:*

$$\mathrm{d}^+ f(x) \le \mathfrak{c}(f; x, v) < +\infty, \tag{4.5.11}$$

para todo $v \in I$ com $v > x$. Similarmente, se $x \in I$ não é a extremidade esquerda então a derivada à esquerda $\mathrm{d}^- f(x)$ existe em $\overline{\mathbb{R}}$ e vale a desigualdade:

$$-\infty < \mathfrak{c}(f; u, x) \le \mathrm{d}^- f(x), \tag{4.5.12}$$

para todo $u \in I$ com $u < x$. Quando $x \in I$ é um ponto interior então existem e são finitas ambas as derivadas laterais $\mathrm{d}^+ f(x)$, $\mathrm{d}^- f(x)$ e vale a desigualdade:

$$\mathrm{d}^- f(x) \le \mathrm{d}^+ f(x). \tag{4.5.13}$$

Se f é estritamente convexa então as desigualdades em (4.5.11) e (4.5.12) são estritas.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que $x \in I$ não é a extremidade direita. O Lema 4.5.2 nos diz que a função:

$$I \cap \left]x, +\infty\right[\ni v \longmapsto \mathfrak{c}(f; x, v) \tag{4.5.14}$$

é crescente; segue então que o limite $\lim_{v \to x^+} \mathfrak{c}(f; x, v)$ existe em $\overline{\mathbb{R}}$ e:

$$\mathrm{d}^+ f(x) = \lim_{v \to x^+} \mathfrak{c}(f; x, v) = \inf_{\substack{v > x \\ v \in I}} \mathfrak{c}(f; x, v),$$

o que prova (4.5.11). Similarmente, se $x \in I$ não é a extremidade esquerda então o Lema 4.5.2 nos diz que a função:

$$I \cap \left]-\infty, x\right[\ni u \longmapsto \mathfrak{c}(f; u, x) \tag{4.5.15}$$

é crescente, donde o limite $\lim_{u \to x^-} \mathfrak{c}(f; u, x)$ existe em $\overline{\mathbb{R}}$ e:

$$\mathrm{d}^- f(x) = \lim_{u \to x^-} \mathfrak{c}(f; u, x) = \sup_{\substack{u < x \\ u \in I}} \mathfrak{c}(f; u, x),$$

provando (4.5.12). Se $x \in I$ é um ponto interior então o Lema 4.5.2 nos diz que:

$$\mathfrak{c}(f;u,x) \le \mathfrak{c}(f;x,v),$$

sempre que $u, v \in I$, $u < x < v$; daí:

$$-\infty < \mathrm{d}^- f(x) = \sup_{\substack{u<x \\ u\in I}} \mathfrak{c}(f;u,x) \le \inf_{\substack{v>x \\ v\in I}} \mathfrak{c}(f;x,v) = \mathrm{d}^+ f(x) < +\infty,$$

provando (4.5.13). Finalmente, se f é estritamente convexa então o Lema 4.5.2 nos diz que as funções (4.5.14) e (4.5.15) são estritamente crescentes, o que prova as desigualdades estritas em (4.5.11) e (4.5.12). □

4.5.6. Corolário. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dados $x, y \in I$ com $x < y$ então:*

$$\mathrm{d}^+ f(x) \le \mathrm{d}^- f(y).$$

A desigualdade é estrita se f é estritamente convexa.

Demonstração. Os Lemas 4.5.2 e 4.5.5 implicam que para todo w em $]x, y[$, temos:

$$\mathrm{d}^+ f(x) \le \mathfrak{c}(f;x,w) \le \mathfrak{c}(f;w,y) \le \mathrm{d}^- f(y).$$

Se f é estritamente convexa então:

$$\mathrm{d}^+ f(x) < \mathfrak{c}(f;x,w) < \mathfrak{c}(f;w,y) < \mathrm{d}^- f(y).$$ □

4.5.7. Corolário. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função convexa num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ então f é contínua em todos os pontos interiores de I.*

Demonstração. Seja x um ponto no interior de I. A existência e a finitude das derivadas laterais $\mathrm{d}^+ f(x)$ e $\mathrm{d}^- f(x)$ implica que os limites laterais $\lim_{y\to x^+} f(y)$ e $\lim_{y\to x^-} f(y)$ existem e são iguais a $f(x)$; de fato:

$$\lim_{y\to x^+} \big(f(y) - f(x)\big) = \lim_{y\to x^+} \big(\mathfrak{c}(f;x,y)(y-x)\big) = \mathrm{d}^+ f(x) \cdot 0 = 0,$$
$$\lim_{y\to x^-} \big(f(y) - f(x)\big) = \lim_{y\to x^-} \big(\mathfrak{c}(f;x,y)(y-x)\big) = \mathrm{d}^- f(x) \cdot 0 = 0.$$

Logo f é contínua no ponto x. □

4.5.8. Lema. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se $x \in I$ é um ponto interior e $a \in \mathbb{R}$ é tal que $\mathrm{d}^- f(x) \le a \le \mathrm{d}^+ f(x)$ então:*

$$f(y) \ge f(x) + a(y-x), \tag{4.5.16}$$

para todo $y \in I$. A desigualdade em (4.5.16) é estrita se f é estritamente convexa e $y \ne x$.

Demonstração. Se $y = x$, vale a igualdade em (4.5.16). Se $y > x$, a desigualdade (4.5.16) é equivalente a $\mathfrak{c}(f;x,y) \ge a$; mas segue do Lema 4.5.5 que:

$$\mathfrak{c}(f;x,y) \ge \mathrm{d}^+ f(x) \ge a.$$

Similarmente, se $y < x$, a desigualdade (4.5.16) é equivalente a $\mathfrak{c}(f; y, x) \le a$; mas segue do Lema 4.5.5 que:

$$\mathfrak{c}(f; y, x) \le \mathrm{d}^- f(x) \le a.$$

Se f é estritamente convexa então $\mathfrak{c}(f; x, y) > \mathrm{d}^+ f(x) \ge a$ para $y > x$ e $\mathfrak{c}(f; y, x) < \mathrm{d}^- f(x) \le a$ para $y < x$. □

Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$ e um ponto $x \in I$, então uma reta:

$$L : \mathbb{R} \ni y \longmapsto ay + b \in \mathbb{R}$$

tal que $f(x) = L(x)$ e $f(y) \ge L(y)$ para todo $y \in I$ é dita uma *reta suporte* para f no ponto x. O Lema 4.5.8 nos diz então que *uma função convexa $f : I \to \mathbb{R}$ num intervalo I possui uma reta suporte em todo ponto x do interior do intervalo I.*

4.5.9. Lema. *Seja $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família não vazia de funções convexas $f_\lambda : I \to \mathbb{R}$ num intervalo I. Se para todo $x \in I$ o supremo $\sup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)$ é finito então a função $f = \sup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ é convexa em I.*

Demonstração. Sejam $x, y \in I$ e $t \in [0, 1]$. Para todo $\lambda \in \Lambda$, temos:

$$f_\lambda\big((1-t)x + ty\big) \le (1-t)f_\lambda(x) + tf_\lambda(y) \le (1-t)f(x) + tf(y);$$

tomando o supremo em λ, obtemos $f\big((1-t)x+ty\big) \le (1-t)f(x)+tf(y)$. □

4.5.10. Corolário. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se f admite uma reta suporte em todo ponto de I então f é convexa.*

Demonstração. Para cada $x \in I$, seja $L_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma reta suporte para f. Obviamente:

$$\sup_{x\in I} L_x(y) \le f(y),$$

para todo $y \in I$. Além do mais:

$$\sup_{x\in I} L_x(y) \ge L_y(y) = f(y),$$

para todo $y \in I$, donde $\sup_{x\in I} L_x = f$. Como cada L_x é convexa (veja Exercício 4.23), segue do Lema 4.5.9 que f é convexa. □

4.5.11. Proposição. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *f é convexa;*
(b) *a derivada f' é crescente;*
(c) *$f(y) \ge f(x) + f'(x)(y - x)$, para todos $x, y \in I$ (o gráfico de f fica acima de suas retas tangentes).*

Demonstração.

- (a)⇒(b).
  Segue do Corolário 4.5.6.

- (b)$\Rightarrow$(c).
  Seja $x \in I$ fixado e considere a função $g : I \to \mathbb{R}$ definida por:
  $$g(y) = f(y) - \big(f(x) + f'(x)(y - x)\big),$$
  para todo $y \in I$. Temos $g'(y) = f'(y) - f'(x) \leq 0$, se $y \in I \cap\,]-\infty, x]$ e $g'(y) \geq 0$, se $y \in I \cap [x, +\infty[$; segue que g é decrescente em $I \cap\,]-\infty, x]$ e crescente em $I \cap [x, +\infty[$. Como $g(x) = 0$, concluímos que $g(y) \geq 0$, para todo $y \in I$.

- (c)$\Rightarrow$(a).
  Segue do Corolário 4.5.10. □

4.5.12. Corolário. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então f é convexa se e somente se a sua derivada segunda f'' é não negativa.*

Demonstração. Evidentemente f' é crescente se e somente se f'' é não negativa. □

Temos a seguinte versão da Proposição 4.5.11 para convexidade estrita.

4.5.13. Proposição. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *f é estritamente convexa;*
(b) *a derivada f' é estritamente crescente;*
(c) *$f(y) > f(x) + f'(x)(y - x)$, para todos $x, y \in I$ com $x \neq y$.*

Demonstração.

- (a)$\Rightarrow$(b).
  Segue do Corolário 4.5.6.

- (b)$\Rightarrow$(c).
  Argumentamos como na demonstração da implicação (b)$\Rightarrow$(c) na Proposição 4.5.11, mas agora temos que $g'(y) < 0$ para $y \in I$ com $y < x$ e $g'(y) > 0$ para $y \in I$ com $y > x$; daí g é estritamente decrescente em $I \cap\,]-\infty, x]$ e estritamente crescente em $I \cap [x, +\infty[$. Concluímos então que $g(y) > 0$, para $y \in I$ com $y \neq x$.

- (c)$\Rightarrow$(a).
  O Corolário 4.5.10 nos garante que f é convexa. Se f não fosse estritamente convexa, existiriam $u, v \in I$, $a, b \in \mathbb{R}$ com $u < v$ e:
  $$f(w) = aw + b,$$
  para todo $w \in [u, v]$ (Corolário 4.5.4). Daí, para todos $x, y \in [u, v]$, teríamos:
  $$f(x) + f'(x)(y - x) = ax + b + a(y - x) = f(y),$$
  contradizendo (c). □

4.5.14. COROLÁRIO. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se sua derivada segunda f'' é positiva então f é estritamente convexa.*

DEMONSTRAÇÃO. Evidentemente f' é estritamente crescente se f'' é positiva. □

4.5.15. EXEMPLO. A recíproca do Corolário 4.5.14 não é verdadeira. De fato, a função $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^4 \in \mathbb{R}$ é estritamente convexa, pois sua derivada $f'(x) = 4x^3$ é estritamente crescente. No entanto, temos $f''(0) = 0$.

4.5.16. PROPOSIÇÃO. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dados $x_1, \ldots, x_n \in I$ e números reais não negativos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ então $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in I$ e:*

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n); \tag{4.5.17}$$

se f é estritamente convexa e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ então a igualdade vale em (4.5.17) se e somente se $x_1 = \cdots = x_n$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $a = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $b = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ então $a, b \in I$ e:

$$a = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)a \le \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \le (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)b = b,$$

donde $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in I$. Para provar o restante da tese, usamos indução em n. O resultado é óbvio no caso que $n = 1$. Assumindo o resultado válido para um certo $n \ge 1$, sejam $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \ge 0$ com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1} = 1$. Vamos mostrar que:

$$\begin{aligned} &f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \\ &\qquad\qquad \le \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned} \tag{4.5.18}$$

Se $\alpha_{n+1} = 1$, vale a igualdade em (4.5.18). Suponha que $\alpha_{n+1} < 1$. Seja $\alpha'_i = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}}$, $i = 1, \ldots, n$. Claramente $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \ge 0$ e $\alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n = 1$, donde a hipótese de indução nos dá:

$$f(\alpha'_1 x_1 + \cdots + \alpha'_n x_n) \le \alpha'_1 f(x_1) + \cdots + \alpha'_n f(x_n).$$

Temos:

$$\begin{aligned} &f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \\ &\quad = f\big((1-\alpha_{n+1})(\alpha'_1 x_1 + \cdots + \alpha'_n x_n) + \alpha_{n+1} x_{n+1}\big) \\ &\quad \le (1-\alpha_{n+1}) f(\alpha'_1 x_1 + \cdots + \alpha'_n x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\quad \le (1-\alpha_{n+1})\big(\alpha'_1 f(x_1) + \cdots + \alpha'_n f(x_n)\big) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\quad = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}), \end{aligned} \tag{4.5.19}$$

onde na primeira desigualdade usamos $\alpha'_1 x_1 + \cdots + \alpha'_n x_n \in I$ e a convexidade de f. Isso prova (4.5.18). Suponha agora que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} > 0$, f é estritamente convexa e vale a igualdade em (4.5.18). Daí todas as desigualdades em (4.5.19) são igualdades e portanto:

$$\alpha_1' x_1 + \cdots + \alpha_n' x_n = x_{n+1}, \tag{4.5.20}$$

e:

$$f(\alpha_1' x_1 + \cdots + \alpha_n' x_n) = \alpha_1' f(x_1) + \cdots + \alpha_n' f(x_n).$$

Como $\alpha_1', \ldots, \alpha_n' > 0$, a hipótese de indução nos dá $x_1 = \cdots = x_n$. Finalmente, (4.5.20) implica que $x_1 = \cdots = x_n = x_{n+1}$. □

Exercícios para o Capítulo 4

Espaços Normados e com Produto Interno.

Exercício 4.1. Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\|\cdot\|$ uma semi-norma em E. Mostre que:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|,$$

para todos $x, y \in E$. Conclua que se $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço normado então a norma $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ é uma aplicação Lipschitziana (e portanto uniformemente contínua), se E é munido da métrica associada a $\|\cdot\|$.

Exercício 4.2. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado sobre $\mathbb{K}$. Se E é munido da métrica associada a $\|\cdot\|$, mostre que as aplicações:

$$E \times E \ni (x, y) \longmapsto x + y \in E, \quad \mathbb{K} \times E \ni (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \in E,$$

são contínuas.

Exercício 4.3. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado sobre $\mathbb{K}$. Mostre que a métrica d associada à norma $\|\cdot\|$ satisfaz as seguintes condições:

(a) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, para todos $x, y, z \in E$ (*invariância por translações*);
(b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e todos $x, y \in E$.

Reciprocamente, se d é uma métrica num espaço vetorial E sobre $\mathbb{K}$ que satisfaz as condições (a) e (b) acima, mostre que existe uma única norma $\|\cdot\|$ em E tal que d é a métrica associada a $\|\cdot\|$.

Exercício 4.4. Seja E um espaço vetorial *real*. Para que uma métrica d em E seja a métrica associada a uma norma em E, mostre que é suficiente que d satisfaça a condição (a) que está no enunciado do Exercício 4.3 e a condição:

(b') $d(\lambda x, \lambda y) = \lambda\, d(x, y)$, para todo $\lambda > 0$ e todos $x, y \in E$ (*homogeneidade positiva*).

Exercício 4.5. Sejam E um espaço vetorial e $S \subset E$ um subespaço vetorial de E. Mostre que:

- a relação binária $\sim$ em E definida por:

  $$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in S, \quad x, y \in E,$$

  é uma relação de equivalência em E;

- para todo $x \in E$, a classe de equivalência de x correspondente a $\sim$ é dada por:
$$x + S = \big\{x + v : v \in S\big\};$$
- existe uma única estrutura de espaço vetorial no conjunto quociente $E/S = \big\{x + S : x \in E\big\}$ tal que a aplicação quociente:
$$q : E \ni x \longmapsto x + S \in E/S$$
é linear.

O espaço vetorial E/S é chamado o *espaço vetorial quociente* de E pelo subespaço S.

Exercício 4.6. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\|\cdot\|$ uma semi-norma em E. Mostre que:

- o conjunto $N = \big\{x \in E : \|x\| = 0\big\}$ é um subespaço de E;
- existe uma única norma $\|\cdot\|'$ no espaço quociente E/N tal que $\|x + N\|' = \|x\|$, para todo $x \in E$.

Definição 4.1. Se E é um espaço vetorial complexo então o espaço vetorial real $E|_{\mathbb{R}}$ obtido de E pela restrição da multiplicação por escalares $\mathbb{C} \times E \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in E$ a $\mathbb{R} \times E$ é chamado a *realificação* de E.

Exercício 4.7. Se E é um espaço vetorial complexo e $\|\cdot\|$ é uma norma em E, mostre que $\|\cdot\|$ também é uma norma na realificação $E|_{\mathbb{R}}$ de E. Dê exemplo de uma norma em $E|_{\mathbb{R}}$ que não é uma norma em E.

Exercício 4.8. Se E é um espaço vetorial complexo e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno em E, mostre que:
$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = \Re\langle x, y\rangle, \quad x, y \in E,$$
define um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$ em $E|_{\mathbb{R}}$. Mostre também que:

(a) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$ determinam a mesma norma (conclua que $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um espaço de Hilbert complexo se e somente se $(E|_{\mathbb{R}}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}})$ é um espaço de Hilbert real);
(b) $\langle ix, iy\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}}$ e $\langle ix, y\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle x, iy\rangle_{\mathbb{R}}$, para todos $x, y \in E$;
(c) $\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} - i\langle ix, y\rangle_{\mathbb{R}}$, para todos $x, y \in E$.

Exercício 4.9. Seja E um espaço vetorial complexo e $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ um produto interno em $E|_{\mathbb{R}}$. Mostre que as duas seguintes condições são equivalentes:

(i) $\langle ix, iy\rangle_0 = \langle x, y\rangle_0$, para todos $x, y \in E$;
(ii) $\langle ix, y\rangle_0 = -\langle x, iy\rangle_0$, para todos $x, y \in E$.

Assumindo que uma das (e portanto ambas as) condições acima são satisfeitas, mostre que:
$$\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_0 - i\langle ix, y\rangle_0, \quad x, y \in E,$$
define um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em E tal que $\langle x, y\rangle_0 = \Re\langle x, y\rangle$, para todos $x, y \in E$.

Exercício 4.10. Seja X um conjunto com mais de um ponto. Mostre que a norma do supremo (Exemplo 4.1.3) definida no espaço vetorial $\mathrm{Bd}(X, \mathbb{K})$ das funções limitadas $f : X \to \mathbb{K}$ não satisfaz a identidade do paralelogramo (veja (4.1.5)). Conclua que essa norma não está associada a nenhum produto interno.

Exercício 4.11 (fórmula de polarização). Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ um produto interno em E. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostre que:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big), \tag{4.5.21}$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big), \tag{4.5.22}$$

para todos $x, y \in E$. Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mostre que:

$$\Re\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big),$$
$$\Re\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big),$$

para todos $x, y \in E$. Use a fórmula que está no item (c) do Exercício 4.8 para concluir que, também no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos escrever uma fórmula para $\langle x, y\rangle$ usando apenas a norma $\|\cdot\|$.

Exercício 4.12. Seja $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço pré-Hilbertiano sobre $\mathbb{K}$. Se E é munido da métrica associada à norma associada a $\langle\cdot,\cdot\rangle$, mostre que o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ é uma aplicação contínua.

Exercício 4.13. Este exercício contém um resultado preparatório que será usado na resolução do Exercício 4.14. Sejam E, E' espaços vetoriais sobre $\mathbb{Q}$ e seja $T : E \to E'$ um homomorfismo de grupos aditivos, i.e., $T(x + y) = T(x) + T(y)$, para todos $x, y \in E$. Mostre que T é linear, i.e., mostre que $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, para todos $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Exercício 4.14. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\|\cdot\|$ uma norma em E que satisfaz a identidade do paralelogramo (4.1.5). O objetivo deste exercício é mostrar que $\|\cdot\|$ está associada a um único produto interno no espaço vetorial E.

(a) Mostre que:
$$\|x+y\|^2 + \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 = \|x+y+z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2,$$
para todos $x, y, z \in E$.

(b) Defina $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ através da fórmula (4.5.21) e use o resultado do item (a) para concluir que $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, para todos $x, y, z \in E$.

(c) Use o resultado do item (b) e o resultado do Exercício 4.13 para concluir que $\langle\lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, para todos $x, y \in E$ e todo $\lambda \in \mathbb{Q}$.

(d) Use o resultado do item (d) e o resultado dos Exercícios 4.1 e 4.2 para concluir que $\langle\lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, para todos $x, y \in E$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostre que (4.5.21) define um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em E e que $\| \cdot \|$ é a norma associada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(f) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, use o resultado do Exercício 4.9 para concluir que existe um único produto interno em E ao qual a norma $\|\cdot\|$ está associada.

EXERCÍCIO 4.15 (teorema de Pitágoras). Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em E. Se $x, y \in E$ são ortogonais, mostre que:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Aplicações Lineares Contínuas.

EXERCÍCIO 4.16. Mostre que:

- um espaço vetorial normado não nulo nunca é um espaço métrico limitado;
- uma aplicação linear não nula entre espaços normados nunca possui imagem limitada.

EXERCÍCIO 4.17. Sejam $(E, \| \cdot \|_E)$, $(F, \| \cdot \|_F)$ espaços normados sobre $\mathbb{K}$, com E não nulo. Se $T : E \to F$ é uma aplicação linear limitada, mostre que:

$$\|T\| = \sup \big\{ \|T(x)\|_F : x \in E \text{ e } \|x\|_E = 1 \big\}.$$

EXERCÍCIO 4.18. Mostre que (4.2.1) define uma norma no espaço vetorial $\mathrm{Lin}(E, F)$.

EXERCÍCIO 4.19. Seja E um espaço vetorial complexo. Denotemos por $\overline{E}$ o conjunto E munido da mesma soma de E e da operação de multiplicação por escalares complexos definida por:

$$\mathbb{C} \times E \ni (\lambda, x) \longmapsto \bar{\lambda} x \in E.$$

Mostre que:

- $\overline{E}$ também é um espaço vetorial complexo;
- uma aplicação $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}$ é uma norma em E se e somente se ela é uma norma em $\overline{E}$.

Dizemos que $\overline{E}$ é o espaço vetorial *conjugado* a E.

EXERCÍCIO 4.20. Sejam E um espaço vetorial complexo e $\overline{E}$ seu espaço vetorial conjugado. Mostre que:

- o espaço vetorial conjugado de $\overline{E}$ é E;
- se S é um subespaço vetorial de E então o espaço vetorial conjugado a S é um subespaço vetorial de $\overline{E}$.

EXERCÍCIO 4.21. Sejam E um espaço vetorial complexo e $\overline{E}$ seu espaço vetorial conjugado. Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em E, mostre que:

$$E \times E \ni (x, y) \longmapsto \overline{\langle x, y \rangle} \in \mathbb{C} \tag{4.5.23}$$

é um produto interno em $\overline{E}$. Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e (4.5.23) definem a mesma norma em E.

EXERCÍCIO 4.22. Sejam E, F espaços vetoriais complexos e $\overline{E}$, $\overline{F}$ seus espaços vetoriais conjugados. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes sobre uma aplicação $T : E \to F$:

- $T : E \to F$ é linear;
- $T : \overline{E} \to \overline{F}$ é linear.

Mostre também que são equivalentes as seguintes afirmações:

- $T : E \to F$ é linear-conjugada;
- $T : \overline{E} \to F$ é linear;
- $T : E \to \overline{F}$ é linear.

Funções Convexas.

EXERCÍCIO 4.23. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim, i.e., existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mostre que f é convexa.

CAPÍTULO 5

Construção de Medidas

5.1. Medidas em Classes de Conjuntos

Recorde da Definição 1.4.42 que um espaço de medida consiste de um conjunto X, de uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ de partes de X e de uma medida μ definida nessa σ-álgebra. Uma σ-álgebra de partes de X é uma coleção de subconjuntos de X que inclui o próprio conjunto X e que é fechada por todas as operações conjuntistas, desde que realizadas apenas uma quantidade enumerável de vezes (veja Definição 1.4.32 e Observação 1.4.33). Espaços de medida são ambientes confortáveis para o desenvolvimento de uma teoria de integração (veja Capítulo 2) justamente porque a classe dos conjuntos mensuráveis (i.e., a σ-álgebra) é fechada pelas várias operações conjuntistas que precisamos fazer durante o desenvolvimento da teoria. Em contra-partida, σ-álgebras são muitas vezes classes de conjuntos um tanto complexas e não é sempre fácil construir exemplos não triviais de medidas definidas em σ-álgebras (considere, por exemplo, o trabalho que tivemos na Seção 1.4 para construir a medida de Lebesgue). Nosso objetivo agora é o de mostrar como construir uma medida numa σ-álgebra a partir de uma medida definida *a priori* apenas em uma classe de conjuntos mais simples. Começamos então definindo a noção de medida em uma classe de conjuntos arbitrária.

5.1.1. DEFINIÇÃO. Seja $\mathcal{C}$ uma classe[1] de conjuntos tal que o conjunto vazio $\emptyset$ pertence a $\mathcal{C}$. Uma *medida finitamente aditiva* em $\mathcal{C}$ é uma função $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e tal que, se $(A_k)_{k=1}^t$ é uma seqüência finita de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{C}$ *tal que* $\bigcup_{k=1}^t A_k$ *também está em* $\mathcal{C}$, então:

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{t} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{t} \mu(A_k). \tag{5.1.1}$$

Uma *medida* em $\mathcal{C}$ é uma função $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e tal que, se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{C}$ *tal que*

[1]Neste texto, as palavras "classe" e "conjunto" têm exatamente o mesmo significado. Observamos que em textos de teoria dos conjuntos e lógica, quando teorias axiomáticas como NBG e KM (vide [**1**]) são expostas, as palavras "classe" e "conjunto" têm significados diferentes (a saber: uma classe X é um *conjunto* quando existe uma classe Y tal que $X \in Y$).

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ *também está em* $\mathcal{C}$, então:

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k). \tag{5.1.2}$$

Claramente toda medida é também uma medida finitamente aditiva; basta tomar $A_k = \emptyset$ para todo $k > t$ em (5.1.2).

Observe que uma medida finitamente aditiva pode em geral não ser uma medida. A expressão "finitamente aditiva" não deve ser encarada como um adjetivo que está sendo acrescido à palavra "medida"; deve-se pensar na expressão "medida finitamente aditiva" como sendo um substantivo. Para evitar mal-entendidos, usaremos muitas vezes a expressão *medida σ-aditiva* como sendo um sinônimo de "medida", quando queremos enfatizar que não estamos falando apenas de uma medida finitamente aditiva.

5.1.2. Observação. Alguns comentários de natureza conjuntista: para $t = 0$, a igualdade (5.1.1) é equivalente a $\mu(\emptyset) = 0$, de modo que a condição $\mu(\emptyset) = 0$ na definição de medida finitamente aditiva é redundante se admitirmos $t = 0$ em (5.1.1). A condição (5.1.2), no entanto, não implica $\mu(\emptyset) = 0$ pois essa condição é consistente com $\mu(A) = +\infty$, para todo $A \in \mathcal{C}$ (veja Exercício 5.1).

Note que se $\mathcal{C}$ é uma classe de conjuntos arbitrária então sempre existe um conjunto X tal que $\mathcal{C} \subset \wp(X)$, isto é, tal que todo elemento de $\mathcal{C}$ é um subconjunto de X. De fato, basta tomar $X = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$.

5.1.3. Observação. A expressão "classe de conjuntos" usada na Definição 5.1.1 é redundante se entendemos que a teoria dos conjuntos usada no texto está fundamentada por uma teoria axiomática como ZFC, já que em ZFC *todo objeto é um conjunto* e portanto todo conjunto $\mathcal{C}$ é também um conjunto de conjuntos. Na prática, no entanto, alguns objetos (como números naturais ou números reais) não são costumeiramente pensados como conjuntos e por questões didáticas consideramos que seja mais claro na Definição 5.1.1 (e em outras situações similares) enfatizar que $\mathcal{C}$ é uma classe de conjuntos.

Muito pouco pode-se provar sobre medidas em classes de conjuntos arbitrárias $\mathcal{C}$ (com $\emptyset \in \mathcal{C}$), pois é bem possível que, a menos de situações triviais, não existam seqüências de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{C}$ cuja união está em $\mathcal{C}$. Em particular, a tese dos Lemas 1.4.46 e 1.4.48 não são em geral satisfeitas para medidas μ em classes de conjuntos arbitrárias, como ilustra o seguinte exemplo.

5.1.4. Exemplo. Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais e considere a classe de conjuntos $\mathcal{C}$ definida por:

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \big\{\{0, 1, \ldots, n\} : n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Dados $A, B \in \mathcal{C}$, se $A \cap B = \emptyset$ então necessariamente $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. Segue que *qualquer* função $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ com $\mu(\emptyset) = 0$ é uma medida em $\mathcal{C}$. É fácil exibir então medidas em $\mathcal{C}$ para as quais as teses dos Lemas 1.4.46 e 1.4.48 não são satisfeitas.

5.1.5. OBSERVAÇÃO. Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos com $\emptyset \in \mathcal{C}$ e seja $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ uma função tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Para verificar que μ é uma medida finitamente aditiva em $\mathcal{C}$, *não é* suficiente verificar que:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \tag{5.1.3}$$

para todos $A, B \in \mathcal{C}$ com $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B \in \mathcal{C}$ (veja Exercício 5.2). No entanto, se a classe $\mathcal{C}$ é *fechada por uniões finitas* (i.e., se $A \cup B \in \mathcal{C}$, para todos $A, B \in \mathcal{C}$) então evidentemente $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ é uma medida finitamente aditiva se e somente se $\mu(\emptyset) = 0$ e (5.1.3) é satisfeita, para todos $A, B \in \mathcal{C}$ com $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B \in \mathcal{C}$.

Se a classe de conjuntos $\mathcal{C}$ onde a medida μ está definida é fechada por diferenças então as patologias observadas no Exemplo 5.1.4 não ocorrem. Esse é o conteúdo do seguinte:

5.1.6. LEMA. *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$ e tal que $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{C}$, para todos $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ tais que $A_1 \subset A_2$ (diz-se nesse caso que a classe de conjuntos $\mathcal{C}$ é* fechada por diferença própria*). Temos que:*

(a) *se $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ é uma medida finitamente aditiva então dados $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ com $A_1 \subset A_2$, temos $\mu(A_1) \le \mu(A_2)$;*

(b) *se $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ é uma medida finitamente aditiva então dados $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ com $A_1 \subset A_2$ e $\mu(A_1) < +\infty$, temos:*
$$\mu(A_2 \setminus A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1);$$

(c) *se $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ é uma medida σ-aditiva e se $(A_k)_{k \ge 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{C}$ tal que $A_k \nearrow A$ e $A \in \mathcal{C}$ então:*
$$\mu(A) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k); \tag{5.1.4}$$

(d) *se $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ é uma medida σ-aditiva e se $(A_k)_{k \ge 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{C}$ tal que $A_k \searrow A$, $A \in \mathcal{C}$ e $\mu(A_1) < +\infty$ então a igualdade* (5.1.4) *vale.*

Suponha adicionalmente que $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{C}$, para todos $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$. Então valem também:

(e) *se $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ é uma medida finitamente aditiva então dados $A, A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{C}$ com $A \subset \bigcup_{k=1}^{t} A_k$, temos:*
$$\mu(A) \le \sum_{k=1}^{t} \mu(A_k);$$

(f) *se $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ é uma medida σ-aditiva então dados $A \in \mathcal{C}$ e uma seqüência $(A_k)_{k \ge 1}$ em $\mathcal{C}$ com $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, temos:*
$$\mu(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Demonstração. A demonstração dos itens (a), (b), (c) e (d) é idêntica à demonstração dos Lemas 1.4.46 e 1.4.48. Passemos à demonstração do item (e). Para cada $k = 1, \ldots, t$, seja $A'_k = A_k \cap A$, de modo que:

$$A = \bigcup_{k=1}^{t} A'_k.$$

Observamos que $A'_k \in \mathcal{C}$, para todo k; de fato:

$$A'_k = A_k \setminus (A_k \setminus A).$$

Agora sejam $B_1 = A'_1$ e $B_k = A'_k \setminus (A'_1 \cup A'_2 \cup \ldots \cup A'_{k-1})$, para $k = 2, \ldots, t$; note que:

$$B_k = \big(\cdots \big((A'_k \setminus A'_1) \setminus A'_2 \big) \cdots \big) \setminus A'_{k-1}, \quad k = 2, \ldots, t,$$

de modo que $B_k \in \mathcal{C}$, para todo k. Pelo resultado do Exercício 1.19, os conjuntos B_k são dois a dois disjuntos[2] e:

$$A = \bigcup_{k=1}^{t} A'_k = \bigcup_{k=1}^{t} B_k.$$

Daí, usando o fato que μ é finitamente aditiva e o resultado do item (a), obtemos:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{t} \mu(B_k) \le \sum_{k=1}^{t} \mu(A_k),$$

já que $B_k \subset A'_k \subset A_k$, para todo $k = 1, \ldots, t$. Isso completa a demonstração do item (e). A demonstração do item (f) é totalmente análoga, basta trocar t por ∞ no argumento acima. □

Temos pouco interesse em estudar medidas em classes de conjuntos totalmente arbitrárias. Vamos então introduzir algumas classes de conjuntos sobre as quais será interessante definir medidas. Recorde da Definição 1.4.32 (veja também Observação 1.4.33) que uma álgebra de partes de um conjunto X é uma coleção de partes de X que inclui o próprio X e que é fechada por união finita e complementação. Embora durante o estudo da teoria de integração seja interessante assumir que o espaço X subjacente a um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ seja um conjunto mensurável, quando desenvolvemos a teoria de construção de medidas é prático trabalhar também com medidas definidas em classes de conjuntos $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ que não incluem o espaço X entre seus elementos. Temos então a seguinte:

5.1.7. Definição. Seja $\mathcal{R}$ uma classe de conjuntos. Dizemos que $\mathcal{R}$ é um *anel* se $\mathcal{R}$ é não vazio e se as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $A \setminus B \in \mathcal{R}$, para todos $A, B \in \mathcal{R}$;
(b) $A \cup B \in \mathcal{R}$, para todos $A, B \in \mathcal{R}$.

---

[2] Na verdade, o Exercício 1.19 considera uma seqüência infinita de conjuntos, mas basta fazer $A'_k = \emptyset$, para todo $k > t$.

Dizemos que $\mathcal{R}$ é um *σ-anel* se $\mathcal{R}$ é não vazio, satisfaz a condição (a) acima e também a condição:

(b') $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$, para toda seqüência $(A_k)_{k\geq 1}$ de elementos de $\mathcal{R}$.

Note que todo σ-anel é também um anel. De fato, se $\mathcal{R}$ é um σ-anel e se $A, B \in \mathcal{R}$, podemos tomar $A_1 = A$ e $A_k = B$ para todo $k \geq 2$ na condição (b'); daí $A \cup B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$.

5.1.8. Observação. Se $\mathcal{R}$ é um anel (em particular, se $\mathcal{R}$ é um σ-anel) então o conjunto vazio $\emptyset$ é um elemento de $\mathcal{R}$. De fato, como $\mathcal{R}$ é não vazio, existe um elemento $A \in \mathcal{R}$; daí $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{R}$.

Se X é um conjunto e $\mathcal{R} \subset \wp(X)$ é uma coleção de partes de X então é fácil ver que $\mathcal{R}$ é uma álgebra (resp., uma σ-álgebra) de partes de X se e somente se $\mathcal{R}$ é um anel (resp., um σ-anel) tal que $X \in \mathcal{R}$ (veja Exercício 5.3).

Temos o seguinte análogo do Lema 1.4.37 para anéis e σ-anéis.

5.1.9. Lema. *Se $\mathcal{R}$ é um anel e se $A, B \in \mathcal{R}$ então $A \cap B \in \mathcal{R}$. Além do mais, se $\mathcal{R}$ é um σ-anel e se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{R}$ então $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{R}$ um anel e sejam $A, B \in \mathcal{R}$. Então os conjuntos $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ estão todos em $\mathcal{R}$ e portanto:

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus \big[(A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big] \in \mathcal{R}.$$

Suponha agora que $\mathcal{R}$ é um σ-anel e seja $(A_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{R}$. Então:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_k) \Big),$$

e portanto $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$. □

Infelizmente, a classe dos intervalos da reta real não é um anel, pois não é fechada por uniões finitas. Para incluir essa importante classe de conjuntos na nossa teoria, precisamos da seguinte:

5.1.10. Definição. Seja $\mathcal{S}$ uma classe de conjuntos. Dizemos que $\mathcal{S}$ é um *semi-anel* se $\mathcal{S}$ é não vazio e se as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $A \cap B \in \mathcal{S}$, para todos $A, B \in \mathcal{S}$;
(b) se $A, B \in \mathcal{S}$ então existem $k \geq 1$ e conjuntos $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{S}$, dois a dois disjuntos, de modo que $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$.

Segue diretamente do Lema 5.1.9 que todo anel é um semi-anel (note que se $A \setminus B \in \mathcal{S}$ então podemos tomar $k = 1$ e $C_1 = A \setminus B$ na condição (b)).

5.1.11. Observação. Se $\mathcal{S}$ é um semi-anel então $\emptyset \in \mathcal{S}$. De fato, como $\mathcal{S}$ é não vazio, existe um elemento $A \in \mathcal{S}$; daí existem $k \geq 1$ e conjuntos $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{S}$ dois a dois disjuntos de modo que $\emptyset = A \setminus A = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$. Portanto $C_i = \emptyset$, para todo $i = 1, \ldots, k$.

Um semi-anel de subconjuntos de um conjunto X que possui o próprio X como elemento é às vezes chamado uma *semi-álgebra* de partes de X (veja Exercício 5.4). Nós não teremos nenhum uso para essa terminologia.

5.1.12. Exemplo. O conjuntos de todos os intervalo da reta real (incluindo aí o vazio e os conjuntos unitários) é um semi-anel. De fato, a interseção de dois intervalos é sempre um intervalo e a diferença de dois intervalos é ou um intervalo ou uma união de dois intervalos disjuntos. Verifica-se facilmente também que a coleção:

$$\mathcal{S} = \big\{ \,]a,b] : a,b \in \mathbb{R},\ a \le b \big\} \subset \wp(\mathbb{R}) \tag{5.1.5}$$

é um semi-anel (note que $]a,b] = \emptyset$ para $a = b$).

5.1.13. Notação. Dadas classes de conjuntos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ nós escrevemos:

$$\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 = \big\{ A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{C}_1,\ A_2 \in \mathcal{C}_2 \big\}.$$

5.1.14. Lema. *Se $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ são semi-anéis então $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ também é um semi-anel.*

Demonstração. Obviamente $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ é não vazio, já que $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ são não vazios. Dados $A_1, B_1 \in \mathcal{S}_1$ e $A_2, B_2 \in \mathcal{S}_2$ então:

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2);$$

como $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{S}_1$, $A_2 \cap B_2 \in \mathcal{S}_2$, segue que $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$. Temos também:

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = U_1 \cup U_2 \cup U_3,$$

onde:

$$U_1 = (A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \cap B_2), \quad U_2 = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2),$$
$$U_3 = (A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2).$$

Os conjuntos U_i, $i = 1, 2, 3$ são dois a dois disjuntos; para completar a demonstração, basta ver que cada U_i é uma união finita disjunta de elementos de $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$. Como $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ são semi-anéis, podemos escrever:

$$A_1 \setminus B_1 = \bigcup_{i=1}^{k} C_i, \quad A_2 \setminus B_2 = \bigcup_{j=1}^{l} D_j,$$

com $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{S}_1$ dois a dois disjuntos e $D_1, \ldots, D_l \in \mathcal{S}_2$ dois a dois disjuntos. Daí:

$$\begin{gathered} U_1 = \bigcup_{i=1}^{k} \big(C_i \times (A_2 \cap B_2)\big), \quad U_2 = \bigcup_{j=1}^{l} \big((A_1 \cap B_1) \times D_j\big), \\ U_3 = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{l} (C_i \times D_j), \end{gathered} \tag{5.1.6}$$

onde $C_i \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, $(A_1 \cap B_1) \times D_j \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ e $C_i \times D_j \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, para todos $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$. Claramente as uniões em (5.1.6) são disjuntas e a demonstração está completa. □

5.1.15. COROLÁRIO. *Se $\mathcal{S}_1$, ..., $\mathcal{S}_n$ são semi-anéis então a classe de conjuntos:*

$$\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_n = \big\{ A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n : A_1 \in \mathcal{S}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}_n \big\}$$

é um semi-anel.

DEMONSTRAÇÃO. Segue diretamente do Lema 5.1.14 usando indução. □

Uma medida (ou uma medida finitamente aditiva) $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ numa classe de conjuntos $\mathcal{C}$ é dita *finita* quando $\mu(A) < +\infty$, para todo $A \in \mathcal{C}$. Vamos agora determinar as medidas finitamente aditivas finitas no semi-anel (5.1.5).

Dizemos que uma função $F : I \to \overline{\mathbb{R}}$ definida num subconjunto I de $\overline{\mathbb{R}}$ é *crescente* (resp., *decrescente*) quando $F(x) \le F(y)$ (resp., $F(x) \ge F(y)$) para todos $x, y \in I$ com $x \le y$. Dizemos que $F : I \to \overline{\mathbb{R}}$ é *estritamente crescente* (resp., *estritamente decrescente*) quando $F(x) < F(y)$ (resp., $F(x) > F(y)$), para todos $x, y \in I$ com $x < y$.

5.1.16. PROPOSIÇÃO. *Seja $\mathcal{S} \subset \wp(\mathbb{R})$ o semi-anel definido em* (5.1.5). *Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função crescente então a função $\mu_F : \mathcal{S} \to [0, +\infty[$ definida por:*

$$\mu_F\big(\,]a, b]\, \big) = F(b) - F(a), \tag{5.1.7}$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \le b$ é uma medida finitamente aditiva finita em $\mathcal{S}$. Além do mais, toda medida finitamente aditiva finita $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty[$ em $\mathcal{S}$ é igual a μ_F, para alguma função crescente $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções crescentes então $\mu_F = \mu_G$ se e somente se a função $F - G$ é constante.

DEMONSTRAÇÃO. Todo elemento não vazio de $\mathcal{S}$ se escreve de modo único na forma $]a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$. O conjunto vazio é igual a $]a, a]$ para todo $a \in \mathbb{R}$; como $F(a) - F(a) = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$, segue que a função μ_F está de fato bem definida pela igualdade (5.1.7). Além do mais, o fato de F ser crescente implica que μ_F toma valores em $[0, +\infty[$ e evidentemente $\mu_F(\emptyset) = 0$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$ com $a \le b$, $a_i \le b_i$, $i = 1, \ldots, k$,

$$]a, b] = \bigcup_{i=1}^{k} \,]a_i, b_i]$$

e suponha que os intervalos $]a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, k$, sejam dois a dois disjuntos. Vamos mostrar que:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{k} \big(F(b_i) - F(a_i)\big). \tag{5.1.8}$$

Se $]a, b] = \emptyset$ então $]a_i, b_i] = \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, k$ e os dois lados de (5.1.8) são nulos. Suponha então que $a < b$. Podemos desconsiderar os índices i tais que $]a_i, b_i] = \emptyset$, pois isso não altera o lado direito de (5.1.8); suponha então que $a_i < b_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Fazendo, se necessário, uma permutação nos índices i, podemos supor que $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$. O Lema 5.1.17 que provaremos logo a seguir nos diz então que:

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \cdots = a_i < b_i = \cdots = a_k < b_k = b,$$

donde a igualdade (5.1.8) segue. Isso completa a demonstração do fato que μ_F é uma medida finitamente aditiva finita em $\mathcal{S}$. Note que se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções crescentes então $\mu_F = \mu_G$ se e somente se:

$$F(b) - F(a) = \mu_F\big(\,]a, b]\,\big) = \mu_G\big(\,]a, b]\,\big) = G(b) - G(a),$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \le b$; logo $\mu_F = \mu_G$ se e somente se:

$$F(b) - G(b) = F(a) - G(a),$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \le b$. Isso prova que $\mu_F = \mu_G$ se e somente se $F - G$ é uma função constante. Finalmente, seja $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty[$ uma medida finitamente aditiva finita em $\mathcal{S}$ e vamos mostrar que existe uma função crescente $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mu = \mu_F$. Defina $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fazendo:

$$F(x) = \begin{cases} \mu\big(\,]0, x]\,\big), & \text{se } x \ge 0, \\ -\mu\big(\,]x, 0]\,\big), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Vamos mostrar que:

$$\mu\big(\,]a, b]\,\big) = F(b) - F(a), \tag{5.1.9}$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \le b$; seguirá então automaticamente que F é crescente, já que $\mu\big(\,]a, b]\,\big) \ge 0$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$. Em primeiro lugar, se $0 \le a \le b$ então $]0, b]$ é igual à união disjunta de $]0, a]$ com $]a, b]$; logo:

$$F(b) = \mu\big(\,]0, b]\,\big) = \mu\big(\,]0, a]\,\big) + \mu\big(\,]a, b]\,\big) = F(a) + \mu\big(\,]a, b]\,\big),$$

donde (5.1.9) é satisfeita. Similarmente, se $a \le b < 0$, mostra-se (5.1.9) observando que $]a, 0]$ é igual à união disjunta de $]a, b]$ com $]b, 0]$. Para completar a demonstração de (5.1.9), consideramos o caso em que $a < 0 \le b$; daí $]a, b]$ é igual à união disjunta de $]a, 0]$ com $]0, b]$, donde:

$$\mu\big(\,]a, b]\,\big) = \mu\big(\,]a, 0]\,\big) + \mu\big(\,]0, b]\,\big) = F(b) - F(a).$$

Isso completa a demonstração de (5.1.9). Concluímos então que F é uma função crescente e que $\mu = \mu_F$. $\square$

5.1.17. Lema. *Sejam* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$*,* $i = 1, \ldots, k$*,* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $a < b$*,* $a_i < b_i$*,* $a_i \leq a_{i+1}$*,* $i = 1, \ldots, k$*,*

$$]a, b] = \bigcup_{i=1}^{k}]a_i, b_i]$$

e tais que os intervalos $]a_i, b_i]$*,* $i = 1, \ldots, k$*, sejam dois a dois disjuntos. Então* $a = a_1$*,* $b = b_k$ *e* $b_i = a_{i+1}$ *para* $i = 1, \ldots, k-1$*.*

Demonstração. Dividimos a demonstração em passos.

Passo 1. $b_i \leq a_{i+1}$*, para* $i = 1, \ldots, k-1$*.*

Seja $i = 1, \ldots, k-1$ fixado e suponha por absurdo que $a_{i+1} < b_i$. Seja c o mínimo entre b_i e b_{i+1}. Daí:

$$a_i \leq a_{i+1} < c \leq b_{i+1}, \quad a_i < c \leq b_i,$$

donde $c \in]a_i, b_i] \cap]a_{i+1}, b_{i+1}] \neq \emptyset$, contradizendo nossas hipóteses.

Passo 2. $b_i = a_{i+1}$*, para* $i = 1, \ldots, k-1$*.*

Seja $i = 1, \ldots, k-1$ fixado. Temos $b_i \in]a_i, b_i]$, $b_{i+1} \in]a_{i+1}, b_{i+1}]$, donde $b_i, b_{i+1} \in]a, b]$; também:

$$a < b_i \leq a_{i+1} < b_{i+1} \leq b,$$

donde $a_{i+1} \in]a, b]$. Sabemos então que existe $j = 1, \ldots, k$ tal que $a_{i+1} \in]a_j, b_j]$. Se fosse $1 \leq j \leq i-1$, teríamos:

$$b_j \leq a_{j+1} \leq a_i < b_i \leq a_{i+1},$$

donde $a_{i+1} \notin]a_j, b_j]$; por outro lado, se fosse $i+1 \leq j \leq k$, teríamos $a_{i+1} \leq a_j$, donde novamente $a_{i+1} \notin]a_j, b_j]$. Vemos então que a única possibilidade é $j = i$, isto é, $a_{i+1} \in]a_i, b_i]$. Logo $a_{i+1} \leq b_i$ e portanto, pelo passo 1, $a_{i+1} = b_i$.

Passo 3. $b_k = b$*.*

Temos $b_k \in]a_k, b_k]$, donde $b_k \in]a, b]$ e $b_k \leq b$. Por outro lado, $b \in]a, b]$ implica $b \in]a_i, b_i]$, para algum $i = 1, \ldots, k$. Se $i = k$ então $b \leq b_k$ e portanto $b_k = b$. Senão, $b \leq b_i = a_{i+1} \leq a_k < b_k$, contradizendo $b_k \leq b$.

Passo 4. $a_1 = a$*.*

Para todo $i = 1, \ldots, k$, temos $a_1 \leq a_i$, donde $a_1 \notin]a_i, b_i]$ e portanto $a_1 \notin]a, b]$; logo $a_1 \leq a$ ou $a_1 > b$. Como $a_1 \leq a_k < b_k = b$, vemos que $a_1 \leq a$. Suponha por absurdo que $a_1 < a$. Seja c o mínimo entre b_1 e a; temos $a_1 < c \leq b_1$, donde $c \in]a_1, b_1] \subset]a, b]$ e $c > a$, o que nos dá uma contradição. $\square$

Recorde da Definição 1.4.35 que se $\mathcal{C}$ é uma coleção arbitrária de partes de um conjunto X então a σ-álgebra de partes de X gerada por $\mathcal{C}$ é a menor σ-álgebra de partes de X que contém $\mathcal{C}$. De forma totalmente análoga, podemos definir as noções de álgebra, anel e σ-anel gerados por uma dada classe de conjuntos.

5.1.18. DEFINIÇÃO. Se X é um conjunto arbitrário e se $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ é uma coleção arbitrária de partes de X então a *álgebra de partes de X gerada por $\mathcal{C}$* é a menor álgebra $\mathcal{A}$ de partes de X que contém $\mathcal{C}$, i.e., $\mathcal{A}$ é uma álgebra de partes de X tal que:

(1) $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$;
(2) se $\mathcal{A}'$ é uma álgebra de partes de X tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}'$ então $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

Dizemos também que $\mathcal{C}$ é um *conjunto de geradores* para a álgebra $\mathcal{A}$.

No Exercício 5.6 pedimos ao leitor para justificar o fato de que a álgebra gerada por uma coleção $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ está de fato bem definida, ou seja, existe uma única álgebra $\mathcal{A}$ satisfazendo as propriedades (1) e (2) acima.

5.1.19. DEFINIÇÃO. Se $\mathcal{C}$ é uma classe de conjuntos arbitrária então o *anel gerado por $\mathcal{C}$* (resp., o *σ-anel gerado por $\mathcal{C}$*) é o menor anel (resp., σ-anel) $\mathcal{R}$ que contém $\mathcal{C}$, i.e., $\mathcal{R}$ é um anel (resp., σ-anel) tal que:

(1) $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$;
(2) se $\mathcal{R}'$ é um anel (resp., σ-anel) tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}'$ então $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$.

Dizemos também que $\mathcal{C}$ é um *conjunto de geradores* para o anel (resp., σ-anel) $\mathcal{R}$.

No Exercício 5.7 pedimos ao leitor para justificar o fato de que o anel (resp., σ-anel) gerado por uma classe de conjuntos $\mathcal{C}$ está de fato bem definido, ou seja, existe um único anel (resp., σ-anel) $\mathcal{R}$ satisfazendo as propriedades (1) e (2) acima.

É interessante observar que não é possível definir uma noção de semi-anel gerado por uma classe de conjuntos (veja Exercício 5.10).

Dada uma medida μ num semi-anel $\mathcal{S}$, nós gostaríamos de estendê-la para o anel (e até para o σ-anel) gerado por $\mathcal{S}$. Extensões de medidas para σ-anéis serão estudadas na Seção 5.3. No momento, nós mostraremos apenas como estender uma medida de um semi-anel para o anel gerado pelo mesmo. Para isso, precisaremos entender melhor a estrutura do anel gerado por um dado semi-anel.

O próximo lema nos dá uma caracterização diferente para o conceito de anel.

5.1.20. LEMA. *Seja $\mathcal{R}$ uma classe de conjuntos não vazia. Então $\mathcal{R}$ é um anel se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) *$A \setminus B \in \mathcal{R}$, para todos $A, B \in \mathcal{R}$ tais que $B \subset A$;*
(b) *$A \cup B \in \mathcal{R}$, para todos $A, B \in \mathcal{R}$ com $A \cap B = \emptyset$;*
(c) *$A \cap B \in \mathcal{R}$, para todos $A, B \in \mathcal{R}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $\mathcal{R}$ é um anel então as condições (a) e (b) são satisfeitas por definição e a condição (c) é satisfeita pelo Lema 5.1.9. Reciprocamente, suponha que $\mathcal{R}$ é uma classe de conjuntos não vazia satisfazendo as condições (a), (b) e (c) acima. Dados $A, B \in \mathcal{R}$, devemos mostrar que

$A \setminus B$ e $A \cup B$ estão em $\mathcal{R}$. Pela condição (c), temos que $A \cap B \in \mathcal{R}$; como:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B),$$

e $A \cap B \subset A$, segue da condição (a) que $A \setminus B$ está em $\mathcal{R}$. Também, como:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B,$$

e os conjuntos $A \setminus B \in \mathcal{R}$ e $B \in \mathcal{R}$ são disjuntos, segue da condição (b) que $A \cup B \in \mathcal{R}$. $\square$

5.1.21. LEMA. *Seja $\mathcal{S}$ um semi-anel. O anel $\mathcal{R}$ gerado por $\mathcal{S}$ é igual ao conjunto das uniões finitas disjuntas de elementos de $\mathcal{S}$, ou seja:*

$$\mathcal{R} = \Big\{ \bigcup_{k=1}^{t} A_k : A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{S} \text{ dois a dois disjuntos}, \ t \geq 1 \Big\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que o anel gerado por $\mathcal{S}$ contém $\mathcal{R}$, já que o anel gerado por $\mathcal{S}$ é uma classe de conjuntos fechada por uniões finitas que contém $\mathcal{S}$. Para mostrar que $\mathcal{R}$ contém o anel gerado por $\mathcal{S}$, é suficiente mostrar que $\mathcal{R}$ é um anel, já que obviamente $\mathcal{R}$ contém $\mathcal{S}$. Para mostrar que $\mathcal{R}$ é um anel, usamos o Lema 5.1.20. É evidente que $\mathcal{R}$ satisfaz a condição (b) do enunciado do Lema 5.1.20. Para ver que $\mathcal{S}$ é fechado por interseções finitas (i.e., satisfaz a condição (c) do enunciado do Lema 5.1.20), sejam $A, B \in \mathcal{R}$ e escreva:

$$A = \bigcup_{k=1}^{t} A_k, \quad B = \bigcup_{l=1}^{r} B_l,$$

com $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{S}$ dois a dois disjuntos e $B_1, \ldots, B_r \in \mathcal{S}$ dois a dois disjuntos. Temos:

$$A \cap B = \bigcup_{k=1}^{t} \bigcup_{l=1}^{r} (A_k \cap B_l),$$

onde $A_k \cap B_l \in \mathcal{S}$ para todos $k = 1, \ldots, t$, $l = 1, \ldots, r$ e os conjuntos $A_k \cap B_l$ são dois a dois disjuntos. Finalmente, mostraremos que $A \setminus B \in \mathcal{R}$, para todos $A, B \in \mathcal{R}$. Suponha primeiramente que $B \in \mathcal{S}$; daí:

$$A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{t} (A_k \setminus B), \tag{5.1.10}$$

onde $A = \bigcup_{k=1}^{t} A_k$ e $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{S}$ são dois a dois disjuntos. Como A_k e B estão em $\mathcal{S}$, temos que $A_k \setminus B$ é uma união finita disjunta de elementos de $\mathcal{S}$, isto é, $A_k \setminus B \in \mathcal{R}$, para todo $k = 1, \ldots, t$. Como a união em (5.1.10) é disjunta, segue que $A \setminus B \in \mathcal{R}$, já que $\mathcal{R}$ satisfaz a condição (b) do enunciado do Lema 5.1.20. Finalmente, dados $A, B \in \mathcal{R}$ arbitrários, temos:

$$A \setminus B = \bigcap_{l=1}^{r} (A \setminus B_l),$$

onde $B = \bigcup_{l=1}^{r} B_l$ e $B_1, \ldots, B_l \in \mathcal{S}$ são dois a dois disjuntos. Como $A \in \mathcal{R}$ e $B_l \in \mathcal{S}$, temos que $A \setminus B_l \in \mathcal{R}$, para todo $l = 1, \ldots, r$, pelo que acabamos de demonstrar; concluímos então que $A \setminus B \in \mathcal{R}$, já que $\mathcal{R}$ é fechado por interseções finitas. $\square$

5.1.22. Corolário. *Se $\mathcal{S}$ é um semi-anel então toda união finita de elementos de $\mathcal{S}$ é também igual a uma união finita disjunta de (possivelmente outros) elementos de $\mathcal{S}$; em particular, o anel gerado por $\mathcal{S}$ coincide também com o conjunto das uniões finitas (não necessariamente disjuntas) de elementos de $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Toda união finita de elementos de $\mathcal{S}$ pertence ao anel $\mathcal{R}$ gerado por $\mathcal{S}$; mas, pelo Lema 5.1.21, todo elemento de $\mathcal{R}$ é igual a uma união finita disjunta de elementos de $\mathcal{S}$. $\square$

Estamos agora em condições de prova o seguinte:

5.1.23. Teorema (pequeno teorema da extensão). *Seja $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ uma medida finitamente aditiva num semi-anel $\mathcal{S}$ e seja $\mathcal{R}$ o anel gerado por $\mathcal{S}$. Então:*

(a) *existe uma única medida finitamente aditiva $\tilde{\mu} : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ em $\mathcal{R}$ tal que $\tilde{\mu}|_{\mathcal{S}} = \mu$;*

(b) *μ é uma medida σ-aditiva em $\mathcal{S}$ se e somente se $\tilde{\mu}$ é uma medida σ-aditiva em $\mathcal{R}$.*

Demonstração. Pelo Lema 5.1.21, todo $A \in \mathcal{R}$ se escreve na forma $A = \bigcup_{k=1}^{t} A_k$, com $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{S}$ dois a dois disjuntos. Se $\tilde{\mu}$ é uma medida finitamente aditiva em $\mathcal{R}$ que estende μ então obrigatoriamente:

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{k=1}^{t} \mu(A_k), \tag{5.1.11}$$

o que prova a unicidade de $\tilde{\mu}$. Para provar a existência de $\tilde{\mu}$, usamos a igualdade (5.1.11) para definir $\tilde{\mu}$, onde $A = \bigcup_{k=1}^{t} A_k$ e $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{S}$ são dois a dois disjuntos. Precisamos, no entanto, mostrar primeiramente que $\tilde{\mu}$ está bem definida, já que é possível que:

$$A = \bigcup_{k=1}^{t} A_k = \bigcup_{l=1}^{r} A'_l,$$

com $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{S}$ dois a dois disjuntos e $A'_1, \ldots, A'_r \in \mathcal{S}$ dois a dois disjuntos. Nesse caso, devemos verificar que:

$$\sum_{k=1}^{t} \mu(A_k) = \sum_{l=1}^{r} \mu(A'_l). \tag{5.1.12}$$

Note que, para todo $k = 1, \ldots, t$, temos:

$$A_k = A_k \cap A = \bigcup_{l=1}^{r} (A_k \cap A'_l),$$

onde $A_k \cap A'_l \in \mathcal{S}$, para $l = 1, \ldots, r$ e os conjuntos $A_k \cap A'_l$ são dois a dois disjuntos. Como também $A_k \in \mathcal{S}$, o fato de μ ser uma medida finitamente aditiva em $\mathcal{S}$ implica que:

$$\mu(A_k) = \sum_{l=1}^{r} \mu(A_k \cap A'_l). \tag{5.1.13}$$

De maneira análoga, vemos que:

$$\mu(A'_l) = \sum_{k=1}^{t} \mu(A'_l \cap A_k), \tag{5.1.14}$$

para todo $l = 1, \ldots, r$. De (5.1.13) e (5.1.14) vem:

$$\sum_{k=1}^{t} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{r} \mu(A_k \cap A'_l) = \sum_{l=1}^{r}\sum_{k=1}^{t} \mu(A'_l \cap A_k) = \sum_{l=1}^{r} \mu(A'_l),$$

o que prova (5.1.12). Logo $\tilde{\mu}$ está bem definida. Devemos verificar agora que $\tilde{\mu}$ é uma medida finitamente aditiva em $\mathcal{R}$. É óbvio que $\tilde{\mu}|_{\mathcal{S}} = \mu$ e em particular $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Como $\mathcal{R}$ é fechado por uniões finitas, é suficiente demonstrar que:

$$\tilde{\mu}(A \cup B) = \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(B),$$

para todos $A, B \in \mathcal{R}$ com $A \cap B = \emptyset$ (veja Observação 5.1.5). Dados $A, B \in \mathcal{R}$ com $A \cap B = \emptyset$, escrevemos:

$$A = \bigcup_{k=1}^{t} A_k, \quad B = \bigcup_{l=1}^{r} B_l,$$

com $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{S}$ dois a dois disjuntos e $B_1, \ldots, B_r \in \mathcal{S}$ dois a dois disjuntos. Daí $A \cup B$ é união disjunta de $A_1, \ldots, A_t, B_1, \ldots, B_r \in \mathcal{S}$ e portanto:

$$\tilde{\mu}(A \cup B) = \sum_{k=1}^{t} \mu(A_k) + \sum_{l=1}^{r} \mu(B_l) = \tilde{\mu}(A) + \tilde{\mu}(B).$$

Isso completa a demonstração de que $\tilde{\mu}$ é uma medida finitamente aditiva. Note que se $\tilde{\mu}$ é uma medida σ-aditiva então obviamente μ também é uma medida σ-aditiva, já que μ é apenas uma restrição de $\tilde{\mu}$. Suponha então que μ é uma medida σ-aditiva e vamos mostrar que $\tilde{\mu}$ também é. Seja $(A_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{R}$ e suponha que $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$; devemos mostrar que:

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_k). \tag{5.1.15}$$

Suponha inicialmente que $A \in \mathcal{S}$. Cada $A_k \in \mathcal{R}$ pode ser escrito na forma:

$$A_k = \bigcup_{u=1}^{r_k} A_{ku},$$

com $A_{k1}, \ldots, A_{kr_k} \in \mathcal{S}$ dois a dois disjuntos. Daí $A \in \mathcal{S}$ é igual à união disjunta dos conjuntos A_{ku}, $k \geq 1$, $u = 1, \ldots, r_k$, sendo que todos os A_{ku} estão em $\mathcal{S}$; como μ é uma medida σ-aditiva em $\mathcal{S}$, segue que:

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{r_k} \mu(A_{ku}).$$

Mas, pela definição de $\tilde{\mu}$, temos $\tilde{\mu}(A_k) = \sum_{u=1}^{r_k} \mu(A_{ku})$, e portanto a igualdade (5.1.15) fica demonstrada no caso em que $A \in \mathcal{S}$. Vamos agora ao caso geral; como $A \in \mathcal{R}$, é possível escrever A na forma:

$$A = \bigcup_{l=1}^{r} B_l,$$

com $B_1, \ldots, B_r \in \mathcal{S}$ dois a dois disjuntos. Temos então:

$$A_k = A_k \cap A = \bigcup_{l=1}^{r} (A_k \cap B_l), \quad B_l = B_l \cap A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_l \cap A_k),$$

para todo $k \geq 1$ e todo $l = 1, \ldots, r$. Usando respectivemente o fato que $\tilde{\mu}$ é uma medida finitamente aditiva e a parte da σ-aditividade de $\tilde{\mu}$ que já foi demonstrada, obtemos:

$$\tilde{\mu}(A_k) = \sum_{l=1}^{r} \tilde{\mu}(A_k \cap B_l), \quad \tilde{\mu}(B_l) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_l \cap A_k).$$

Então:

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{l=1}^{r} \tilde{\mu}(B_l) = \sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_l \cap A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{r} \tilde{\mu}(A_k \cap B_l) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_k),$$

o que prova (5.1.15) e completa a demonstração. □

5.1.24. Corolário. *As afirmações que aparecem nos itens (a), (c), (d), (e) e (f) do enunciado do Lema 5.1.6 são verdadeiras sob a hipótese de que a classe de conjuntos $\mathcal{C}$ seja um semi-anel; a afirmação que aparece no item (b) também é verdadeira, sob a hipótese de que $A_2 \setminus A_1$ esteja em $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{R}$ o anel gerado pelo semi-anel $\mathcal{C}$ e seja $\tilde{\mu}$ a medida finitamente aditiva em $\mathcal{R}$ que estende $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$. Como o anel $\mathcal{R}$ é fechado por diferenças, o Lema 5.1.6 pode ser aplicado à medida finitamente aditiva $\tilde{\mu}$. A conclusão segue. □

5.1.25. Exemplo. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e considere a medida finitamente aditiva finita $\mu_F : \mathcal{S} \to [0, +\infty[$ correspondente a F definida no enunciado da Proposição 5.1.16. Vamos determinar uma condição necessária sobre F para que μ_F seja uma medida σ-aditiva. Note em primeiro lugar que, como a função F é crescente, então para todo $a \in \mathbb{R}$ o limite à direita:

$$F(a^+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to a^+} F(x) \in \mathbb{R}$$

existe e é maior ou igual a $F(a)$. Suponha que μ_F seja uma medida σ-aditiva e seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Nós temos:

$$\left]a, a + \tfrac{1}{n}\right] \searrow \emptyset;$$

pelo Corolário 5.1.24, isso nos dá:

$$0 = \mu_F(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} \mu_F\big(\left]a, a + \tfrac{1}{n}\right]\big) = \lim_{n\to\infty} \big[F\big(a+\tfrac{1}{n}\big)-F(a)\big] = F(a^+)-F(a).$$

Logo $F(a) = F(a^+)$ e portanto F é contínua à direita. Na verdade, nós veremos adiante na Proposição 5.1.32 que μ_F é uma medida σ-aditiva se e somente se a função crescente F é contínua à direita.

5.1.1. O critério da classe compacta. Nós vimos no Teorema 5.1.23 que toda medida finitamente aditiva μ num semi-anel $\mathcal{S}$ estende-se de modo único a uma medida finitamente aditiva $\tilde{\mu}$ no anel gerado por $\mathcal{S}$; a extensão $\tilde{\mu}$ é uma medida σ-aditiva se e somente se μ o for. Enquanto é muitas vezes possível mostrar por técnicas elementares que uma função $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ é uma medida finitamente aditiva (veja, por exemplo, a demonstração da Proposição 5.1.16), a situação não é tão simples quando se quer provar a σ-aditividade[3] de μ. Nesta subseção nós provaremos um critério prático para verificação da σ-aditividade de uma medida finitamente aditiva num semi-anel. Como corolário, nós determinaremos exatamente quais são as funções crescentes $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para as quais a medida finitamente aditiva μ_F é uma medida σ-aditiva.

Precisamos da seguinte:

5.1.26. Definição. Uma classe de conjuntos $\mathcal{C}$ é dita *compacta* quando para toda seqüência $(C_k)_{k\ge1}$ em $\mathcal{C}$ com $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \emptyset$ existe $t \ge 1$ tal que $\bigcap_{k=1}^{t} C_k = \emptyset$.

5.1.27. Exemplo. Se $\mathcal{C}$ é uma classe arbitrária de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ então $\mathcal{C}$ é uma classe compacta. De fato, seja $(C_k)_{k\ge1}$ uma seqüência em $\mathcal{C}$ com $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \emptyset$. Temos:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^{\mathrm{c}},$$

e em particular os conjuntos $(C_k^{\mathrm{c}})_{k\ge1}$ constituem uma cobertura aberta do compacto C_1. Logo existem $t_1, \ldots, t_r \ge 1$ tais que:

$$C_1 \subset C_{t_1}^{\mathrm{c}} \cup \ldots \cup C_{t_r}^{\mathrm{c}}.$$

Tomando $t = \max\{t_1, \ldots, t_r\}$ então:

$$C_1 \cap \ldots \cap C_t \subset C_1 \cap C_{t_1} \cap \ldots \cap C_{t_r} = \emptyset.$$

[3]Uma análise ingênua da situação poderia levar a crer que, sob hipóteses adequadas para a função F, poder-se-ia provar a σ-aditividade de μ_F na Proposição 5.1.16 utilizando alguma versão do Lema 5.1.17 para seqüências infinitas de intervalos $\left]a_i, b_i\right]$. A situação não é tão simples, como mostra o Exercício 5.15.

5.1.28. Proposição (critério da classe compacta). *Seja* $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ *uma medida finitamente aditiva num semi-anel* $\mathcal{S}$*. Suponha que existe uma classe compacta* $\mathcal{C}$ *tal que para todo* $A \in \mathcal{S}$ *e para todo* $\varepsilon > 0$ *existem* $B \in \mathcal{S}$*,* $C \in \mathcal{C}$ *tais que* $B \subset C \subset A$ *e:*

$$\mu(A) < \mu(B) + \varepsilon. \tag{5.1.16}$$

Então μ *é uma medida* σ*-aditiva.*

Note que as hipóteses da Proposição 5.1.28 implicam em particular que a medida finitamente aditiva μ é finita; de fato, a desigualdade (5.1.16) implica que $\mu(A) < +\infty$.

Antes de demonstrar a Proposição 5.1.28, precisamos de alguns resultados preparatórios. O próximo lema nos dá um critério para a σ-aditividade de medidas finitamente aditivas em anéis.

5.1.29. Lema. *Seja* $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ *uma medida finitamente aditiva num anel* $\mathcal{R}$*. Suponha que para toda seqüência* $(A_k)_{k\ge1}$ *em* $\mathcal{R}$ *tal que* $A_k \searrow \emptyset$ *temos* $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$*. Então* μ *é uma medida* σ*-aditiva em* $\mathcal{R}$*.*

Demonstração. Seja $(B_k)_{k\ge1}$ uma seqüência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{R}$ tal que a união $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ está em $\mathcal{R}$; vamos mostrar que $\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$. Para cada $k \ge 1$, seja $A_k = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} B_i$; temos:

$$B = B_1 \cup \ldots \cup B_k \cup A_k, \tag{5.1.17}$$

onde a união em (5.1.17) é disjunta. Note que cada A_k está em $\mathcal{R}$, já que $A_k = B \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_k)$. Como μ é uma medida finitamente aditiva em $\mathcal{R}$, obtemos:

$$\mu(B) = \mu(A_k) + \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i). \tag{5.1.18}$$

Claramente $A_k \searrow \emptyset$ e portanto $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0$; a conclusão é obtida fazendo $k \to \infty$ em (5.1.18). $\square$

5.1.30. Corolário. *A Proposição 5.1.28 é verdadeira sob a hipótese adicional de que* $\mathcal{S}$ *seja um anel.*

Demonstração. Já que $\mathcal{S}$ é um anel, podemos usar o Lema 5.1.29 para estabelecer o fato de que μ é uma medida σ-aditiva. Seja $(A_k)_{k\ge1}$ uma seqüência em $\mathcal{S}$ tal que $A_k \searrow \emptyset$. Vamos mostrar que:

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = 0. \tag{5.1.19}$$

Seja dado $\varepsilon > 0$ e para cada $k \ge 1$ sejam $B_k \in \mathcal{S}$, $C_k \in \mathcal{C}$ tais que:

$$B_k \subset C_k \subset A_k, \quad \mu(A_k) < \mu(B_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Temos:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset,$$

e portanto existe $t \geq 1$ tal que $\bigcap_{k=1}^{t} C_k = \emptyset$; daí $\bigcap_{k=1}^{t} B_k = \emptyset$ e portanto:

$$A_t = \bigcup_{k=1}^{t} (A_t \setminus B_k) \subset \bigcup_{k=1}^{t} (A_k \setminus B_k).$$

Usando o item (e) do Lema 5.1.6, obtemos:

$$\mu(A_t) \leq \sum_{k=1}^{t} \mu(A_k \setminus B_k) = \sum_{k=1}^{t} \big(\mu(A_k) - \mu(B_k)\big) < \sum_{k=1}^{t} \frac{\varepsilon}{2^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Logo $\mu(A_k) \leq \mu(A_t) < \varepsilon$, para todo $k \geq t$, o que prova (5.1.19) e completa a demonstração. □

Para demonstrar a Proposição 5.1.28 nós consideraremos a medida finitamente aditiva $\tilde{\mu}$ que estende μ para o anel $\mathcal{R}$ gerado por $\mathcal{S}$ e nós usaremos uma classe compacta $\widetilde{\mathcal{C}}$ de modo que $\tilde{\mu}$ e $\widetilde{\mathcal{C}}$ satisfaçam as hipóteses da Proposição 5.1.28.

5.1.31. Lema. *Seja $\mathcal{C}$ uma classe compacta e seja $\widetilde{\mathcal{C}}$ a classe formada por todas as uniões finitas de elementos de $\mathcal{C}$, isto é:*

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \Big\{ \bigcup_{k=1}^{t} C_k : C_1, \ldots, C_t \in \mathcal{C},\ t \geq 1 \Big\}.$$

Então $\widetilde{\mathcal{C}}$ também é uma classe compacta.

Demonstração. Seja $(\widetilde{C}_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de elementos de $\widetilde{\mathcal{C}}$ tal que $\bigcap_{k=1}^{\infty} \widetilde{C}_k = \emptyset$; devemos mostrar que existe $t \geq 1$ tal que $\bigcap_{k=1}^{t} \widetilde{C}_k = \emptyset$. Suponha por absurdo que $\bigcap_{k=1}^{t} \widetilde{C}_k \neq \emptyset$, para todo $t \geq 1$. Para cada $k \geq 1$ escrevemos:

$$\widetilde{C}_k = \bigcup_{i \in I_k} C_{ki},$$

onde I_k é um conjunto finito não vazio e $C_{ki} \in \mathcal{C}$, para todo $i \in I_k$. Para cada $t \geq 1$, existe $x_t \in \bigcap_{k=1}^{t} \widetilde{C}_k$ e portanto para cada $k = 1, \ldots, t$, temos $x_t \in \widetilde{C}_k$; daí existe um índice $i_k^t \in I_k$ tal que $x_t \in C_{k i_k^t}$. Em particular:

$$x_t \in \bigcap_{k=1}^{t} C_{k i_k^t} \neq \emptyset. \tag{5.1.20}$$

Nós vamos construir uma seqüência $(j_k)_{k\geq 1} \in \prod_{k=1}^{\infty} I_k$ tal que:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_{k j_k} \neq \emptyset;$$

uma vez que essa seqüência esteja construída, teremos:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} C_{k j_k} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \widetilde{C}_k \neq \emptyset, \tag{5.1.21}$$

o que nos dará uma contradição e completará a demonstração. Nosso plano é construir indutivamente uma seqüência $(j_k)_{k\ge 1} \in \prod_{k=1}^{\infty} I_k$ tal que para todo $k \ge 1$, existam uma infinidade de índices $t \ge k$ tais que:

$$(j_1, \dots, j_k) = (i_1^t, \dots, i_k^t). \tag{5.1.22}$$

Em primeiro lugar, como $(i_1^t)_{t\ge 1}$ é uma seqüência de elementos do conjunto finito I_1, deve existir $j_1 \in I_1$ tal que $j_1 = i_1^t$ para uma infinidade de índices $t \ge 1$. Suponha que tenhamos construído $(j_1, \dots, j_k) \in I_1 \times \dots \times I_k$ de modo que a igualdade (5.1.22) é válida para uma infinidade de índices $t \ge k$. Se T é o conjunto infinito constituído pelos índices $t \ge k+1$ tais que a igualdade (5.1.22) é satisfeita então $(i_{k+1}^t)_{t\in T}$ é uma família infinita de elementos do conjunto finito I_{k+1} e portanto existe $j_{k+1} \in I_{k+1}$ tal que $j_{k+1} = i_{k+1}^t$, para uma infinidade de índices $t \in T$; daí:

$$(j_1, \dots, j_k, j_{k+1}) = (i_1^t, \dots, i_k^t, i_{k+1}^t),$$

para uma infinidade de índices $t \ge k+1$. Nós obtivemos então uma seqüência $(j_k)_{k\ge 1} \in \prod_{k=1}^{\infty} I_k$ tal que para todo $k \ge 1$ a igualdade (5.1.22) é satisfeita para uma infinidade de índices $t \ge k$; em particular, para todo $k \ge 1$ existe $t \ge k$ tal que a igualdade (5.1.22) é satisfeita e daí, usando (5.1.20), obtemos:

$$\bigcap_{r=1}^{k} C_{rj_r} = \bigcap_{r=1}^{k} C_{ri_r^t} \supset \bigcap_{r=1}^{t} C_{ri_r^t} \ne \emptyset.$$

Como $\mathcal{C}$ é uma classe compacta e $\bigcap_{r=1}^{k} C_{rj_r} \ne \emptyset$ para todo $k \ge 1$, segue que $\bigcap_{r=1}^{\infty} C_{rj_r} \ne \emptyset$. Obtivemos então (5.1.21), o que nos dá uma contradição e completa a demonstração. □

Demonstração da Proposição 5.1.28. Seja $\mathcal{R}$ o anel gerado por $\mathcal{S}$ e $\tilde{\mu} : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ a única medida finitamente aditiva em $\mathcal{R}$ que estende μ (veja Teorema 5.1.23); nós vamos mostrar que $\tilde{\mu}$ é uma medida σ-aditiva em $\mathcal{R}$ e isso completará a demonstração. Seja $\widetilde{\mathcal{C}}$ a classe compacta definida no enunciado do Lema 5.1.31; vamos mostrar que para todo $A \in \mathcal{R}$ e para todo $\varepsilon > 0$ existem $B \in \mathcal{R}$, $C \in \widetilde{\mathcal{C}}$ tais que $B \subset C \subset A$ e $\tilde{\mu}(A) < \tilde{\mu}(B) + \varepsilon$. Seguirá então do Corolário 5.1.30 que $\tilde{\mu}$ é uma medida σ-aditiva. Pelo Lema 5.1.21, podemos escrever $A = \bigcup_{k=1}^{t} A_k$, com $A_1, \dots, A_t \in \mathcal{S}$ dois a dois disjuntos e $t \ge 1$. Para cada $k = 1, \dots, t$, existem $B_k \in \mathcal{S}$ e $C_k \in \mathcal{C}$ com $B_k \subset C_k \subset A_k$ e $\mu(A_k) < \mu(B_k) + \frac{\varepsilon}{t}$. Tomando $B = \bigcup_{k=1}^{t} B_k \in \mathcal{R}$ e $C = \bigcup_{k=1}^{t} C_k \in \widetilde{\mathcal{C}}$ então $B \subset C \subset A$ e:

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{k=1}^{t} \mu(A_k) < \sum_{k=1}^{t} \big(\mu(B_k) + \tfrac{\varepsilon}{t}\big) = \tilde{\mu}(B) + \varepsilon,$$

já que os conjuntos $B_1, \dots, B_t \in \mathcal{S}$ são dois a dois disjuntos. Isso completa a demonstração. □

Como aplicação da Proposição 5.1.28, nós vamos determinar para quais funções crescentes $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a medida finitamente aditiva correspondente μ_F é σ-aditiva.

5.1.32. PROPOSIÇÃO. *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função crescente e seja* $\mu_F : \mathcal{S} \to [0, +\infty[$ *a medida finitamente aditiva finita correspondente a* F *definida no enunciado da Proposição 5.1.16. Então* μ_F *é uma medida* σ*-aditiva se e somente se a função* F *é contínua à direita.*

DEMONSTRAÇÃO. Nós já vimos no Exemplo 5.1.25 que se μ_F é uma medida σ-aditiva então a função F é contínua à direita. Reciprocamente, suponha que F é contínua à direita e vamos demonstrar que a medida finitamente aditiva μ_F é uma medida σ-aditiva. Seja:

$$\mathcal{C} = \{\emptyset\} \cup \big\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a \le b\big\};$$

pelo Exemplo 5.1.27, $\mathcal{C}$ é uma classe compacta. Vamos verificar as hipóteses da Proposição 5.1.28. Sejam dados $A \in \mathcal{S}$ e $\varepsilon > 0$. Se $A = \emptyset$, tomamos $B = C = \emptyset$. Se $A \ne \emptyset$ então $A = \,]a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e, como F é contínua à direita no ponto a, existe $\delta > 0$ tal que $a < a + \delta < b$ e $F(a + \delta) < F(a) + \varepsilon$. Tomamos então $B = \,]a + \delta, b] \in \mathcal{S}$, $C = [a + \delta, b] \in \mathcal{C}$, de modo que $B \subset C \subset A$ e:

$$\mu_F(A) = F(b) - F(a) < F(b) - F(a + \delta) + \varepsilon = \mu_F(B) + \varepsilon. \qquad \square$$

5.2. Classes Monotônicas e Classes σ-aditivas

Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos e $\mathcal{A}$ o σ-anel gerado por $\mathcal{C}$. Digamos que nós saibamos que todo elemento de $\mathcal{C}$ satisfaz uma certa propriedade $\mathbb{P}$ e que nós gostaríamos de verificar que todo elemento de $\mathcal{A}$ também satisfaz $\mathbb{P}$. Em geral pode ser inviável apresentar uma descrição concreta dos elementos de $\mathcal{A}$ a partir dos elementos de $\mathcal{C}$ (compare a complexidade do σ-anel dos Boreleanos da reta com a simplicidade da classe dos intervalos da reta, que é um conjunto de geradores para os Boreleanos). Uma possibilidade seria mostrar que a classe de todos os conjuntos que satisfazem a propriedade $\mathbb{P}$ é um σ-anel; isso implicaria imediatamente que tal classe deve conter $\mathcal{A}$. No entanto, existem situações concretas em que é difícil verificar que a classe dos conjuntos que satisfazem a propriedade $\mathbb{P}$ é fechada por uniões enumeráveis e diferenças, mas é simples verificar que tal classe é fechada por operações como uniões (finitas ou enumeráveis) disjuntas ou diferenças próprias. O objetivo desta seção é o de provar resultados do seguinte tipo: se a classe de conjuntos $\mathcal{C}$ satisfaz certas hipóteses e se a classe de conjuntos que satisfaz a propriedade $\mathbb{P}$ é fechada por certas operações então todo elemento do σ-anel $\mathcal{A}$ gerado por $\mathcal{C}$ satisfaz a propriedade $\mathbb{P}$.

Começamos com a seguinte:

5.2.1. DEFINIÇÃO. Seja $\mathcal{E}$ uma classe de conjuntos. Dizemos que $\mathcal{E}$ é uma *classe monotônica* se $\emptyset \in \mathcal{E}$ e se $\mathcal{E}$ satisfaz as seguintes condições:

- se $(A_k)_{k \ge 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{E}$ e $A_k \nearrow A$ então $A \in \mathcal{E}$;

- se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{E}$ e $A_k \searrow A$ então $A \in \mathcal{E}$.

Dizemos que $\mathcal{E}$ é uma *classe σ-aditiva* se $\mathcal{E}$ é não vazia e satisfaz as seguintes condições:

- se $A, B \in \mathcal{E}$ e $A \cap B = \emptyset$ então $A \cup B \in \mathcal{E}$;
- se $A, B \in \mathcal{E}$ e $B \subset A$ então $A \setminus B \in \mathcal{E}$;
- se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{E}$ e $A_k \nearrow A$ então $A \in \mathcal{E}$.

Claramente, se $\mathcal{E}$ é uma classe σ-aditiva então $\emptyset \in \mathcal{E}$; de fato, tome qualquer $A \in \mathcal{E}$ e observe que $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{E}$.

5.2.2. EXEMPLO. Sejam $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$, $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ medidas finitas num σ-anel $\mathcal{A}$. Usando o Lema 5.1.6, vê-se facilmente que a classe de conjuntos:

$$\big\{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\big\} \tag{5.2.1}$$

é ao mesmo tempo uma classe σ-aditiva e uma classe monotônica.

Em analogia à Definição 5.1.19, enunciamos a seguinte:

5.2.3. DEFINIÇÃO. Se $\mathcal{C}$ é uma classe de conjuntos arbitrária então a *classe monotônica gerada por* $\mathcal{C}$ (resp., a *classe σ-aditiva gerada por* $\mathcal{C}$) é a menor classe monotônica (resp., classe σ-aditiva) $\mathcal{E}$ que contém $\mathcal{C}$, i.e., $\mathcal{E}$ é uma classe monotônica (resp., classe σ-aditiva) tal que:

(1) $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$;
(2) se $\mathcal{E}'$ é uma classe monotônica (resp., classe σ-aditiva) tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}'$ então $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$.

Dizemos também que $\mathcal{C}$ é um *conjunto de geradores* para a classe monotônica (resp., classe σ-aditiva) $\mathcal{E}$.

No Exercício 5.17 pedimos ao leitor para justificar o fato de que a classe monotônica (resp., a classe σ-aditiva) gerada por uma classe de conjuntos $\mathcal{C}$ está de fato bem definida, ou seja, existe uma única classe monotônica (resp., classe σ-aditiva) $\mathcal{E}$ satisfazendo as propriedades (1) e (2) acima.

Temos o seguinte:

5.2.4. LEMA (lema da classe monotônica). *Se $\mathcal{R}$ é um anel então a classe monotônica gerada por $\mathcal{R}$ coincide com o σ-anel gerado por $\mathcal{R}$. Em particular, toda classe monotônica que contém um anel $\mathcal{R}$ contém também o σ-anel gerado por $\mathcal{R}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathcal{A}$ o σ-anel gerado por $\mathcal{R}$ e seja $\mathcal{E}$ a classe monotônica gerada por $\mathcal{R}$. Segue do Lema 5.1.9 que todo σ-anel é uma classe monotônica e portanto $\mathcal{A}$ contém $\mathcal{E}$. Para mostrar que $\mathcal{E}$ contém $\mathcal{A}$, basta verificar que $\mathcal{E}$ é um σ-anel. Dividimos o restante da demonstração em vários passos.

Passo 1. *Se $A, B \in \mathcal{E}$ então $A \cup B \in \mathcal{E}$.*

Seja $B \in \mathcal{E}$ fixado e considere a classe de conjuntos:

$$\big\{A \in \mathcal{A} : A \cup B \in \mathcal{E}\big\}. \tag{5.2.2}$$

Afirmamos que (5.2.2) é uma classe monotônica. De fato, o conjunto vazio está em (5.2.2) pois $B \in \mathcal{E}$. Se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência em (5.2.2) e $A_k \nearrow A$ então $A \in \mathcal{A}$ e $A_k \cup B \in \mathcal{E}$, para todo $k \geq 1$. Como $(A_k \cup B) \nearrow (A \cup B)$ e $\mathcal{E}$ é uma classe monotônica, segue que $A \cup B \in \mathcal{E}$; portanto A está em (5.2.2). Se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência em (5.2.2) com $A_k \searrow A$ então verifica-se de modo análogo que A está em (5.2.2), usando o fato que $(A_k \cup B) \searrow (A \cup B)$. Logo (5.2.2) é uma classe monotônica. Se o conjunto B estiver no anel $\mathcal{R}$ então $A \cup B \in \mathcal{R} \subset \mathcal{E}$ para todo $A \in \mathcal{R}$ e portanto (5.2.2) contém $\mathcal{R}$; concluímos então que (5.2.2) contém $\mathcal{E}$, o que prova que $A \cup B \in \mathcal{E}$, para todo $A \in \mathcal{E}$ e todo $B \in \mathcal{R}$. Seja agora $B \in \mathcal{E}$ arbitrário. Pelo que acabamos de mostrar, (5.2.2) contém $\mathcal{R}$; logo (5.2.2) também contém $\mathcal{E}$. Isso prova que $A \cup B \in \mathcal{E}$, para todos $A, B \in \mathcal{E}$.

Passo 2. *Se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{E}$ então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{E}$.*

Para cada $t \geq 1$, seja $B_t = \bigcup_{k=1}^{t} A_k$; temos $B_t \nearrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $B_t \in \mathcal{E}$ para todo $t \geq 1$, pelo passo 1. Como $\mathcal{E}$ é uma classe monotônica, segue que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{E}$.

Passo 3. *Se $A \in \mathcal{E}$ e $B \in \mathcal{R}$ então $A \setminus B \in \mathcal{E}$.*

Seja $B \in \mathcal{R}$ fixado e considere a classe de conjuntos:

$$\big\{A \in \mathcal{A} : A \setminus B \in \mathcal{E}\big\}. \tag{5.2.3}$$

Afirmamos que (5.2.3) é uma classe monotônica. De fato, o conjunto vazio está em (5.2.3), pois $\emptyset \in \mathcal{E}$. Se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência em (5.2.3) tal que $A_k \nearrow A$ (resp., tal que $A_k \searrow A$) então $A \in \mathcal{A}$ e $A_k \setminus B \in \mathcal{E}$, para todo $k \geq 1$; conclui-se então que A está em (5.2.3) observando-se que $(A_k \setminus B) \nearrow (A \setminus B)$ (resp., que $(A_k \setminus B) \searrow (A \setminus B)$). Isso prova que (5.2.3) é uma classe monotônica. Claramente, se $A \in \mathcal{R}$ então $A \setminus B \in \mathcal{R} \subset \mathcal{E}$ e portanto (5.2.3) contém $\mathcal{R}$; concluímos então que (5.2.3) contém $\mathcal{E}$, o que prova que $A \setminus B \in \mathcal{E}$, para todo $A \in \mathcal{E}$ e todo $B \in \mathcal{R}$.

Passo 4. *Se $A, B \in \mathcal{E}$ então $A \setminus B \in \mathcal{E}$.*

Seja $A \in \mathcal{E}$ fixado e considere a classe de conjuntos:

$$\big\{B \in \mathcal{A} : A \setminus B \in \mathcal{E}\big\}. \tag{5.2.4}$$

De forma análoga ao que foi feito no passo 3, prova-se que (5.2.4) é uma classe monotônica usando o fato que $B_k \nearrow B$ (resp., $B_k \searrow B$) implica em $(A \setminus B_k) \searrow (A \setminus B)$ (resp., $(A \setminus B_k) \nearrow (A \setminus B)$). Finalmente, o que provamos no passo 3 implica que (5.2.4) contém $\mathcal{R}$ e daí segue que (5.2.4) contém $\mathcal{E}$. Logo $A \setminus B \in \mathcal{E}$, para todos $A, B \in \mathcal{E}$. $\square$

5.2.5. Lema (lema da classe σ-aditiva). *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos* fechada por interseções finitas*, i.e., $A \cap B \in \mathcal{C}$, para todos $A, B \in \mathcal{C}$. Então* *a classe σ-aditiva gerada por $\mathcal{C}$ coincide com o σ-anel gerado por $\mathcal{C}$. Em particular, toda classe σ-aditiva que contém uma classe fechada por interseções finitas $\mathcal{C}$ contém também o σ-anel gerado por $\mathcal{C}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathcal{A}$ o σ-anel gerado por $\mathcal{C}$ e seja $\mathcal{E}$ a classe σ-aditiva gerada por $\mathcal{C}$. Evidentemente todo σ-anel é uma classe σ-aditiva e portanto $\mathcal{A}$ contém $\mathcal{E}$. Para mostrar que $\mathcal{E}$ contém $\mathcal{A}$, basta verificar que $\mathcal{E}$ é um σ-anel. Assuma por um momento que já tenhamos mostrado que $\mathcal{E}$ é fechado por interseções finitas. Segue então do Lema 5.1.20 que $\mathcal{E}$ é um anel. Além do mais, se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{E}$ então $B_t = \bigcup_{k=1}^{t} A_k \in \mathcal{E}$ para todo $t \geq 1$ e $B_t \nearrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, donde $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{E}$. Concluímos então que $\mathcal{E}$ é um σ-anel. Para completar a demonstração, verificaremos que $A \cap B \in \mathcal{E}$, para todos $A, B \in \mathcal{E}$. Seja $B \in \mathcal{A}$ fixado e considere a classe de conjuntos:

$$\big\{A \in \mathcal{A} : A \cap B \in \mathcal{E}\big\}. \tag{5.2.5}$$

Afirmamos que (5.2.5) é uma classe σ-aditiva. Em primeiro lugar, o conjunto vazio está em (5.2.5), pois $\emptyset \cap B = \emptyset \in \mathcal{E}$. Dados A_1 e A_2 em (5.2.5) com $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ então $A_1 \cap B, A_2 \cap B \in \mathcal{E}$ e $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset$; como $\mathcal{E}$ é uma classe σ-aditiva, segue que $(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) = (A_1 \cup A_2) \cap B \in \mathcal{E}$ e portanto $A_1 \cup A_2$ está em (5.2.5). Suponha agora que A_1 e A_2 são elementos de (5.2.5) com $A_1 \subset A_2$. Temos $A_1 \cap B, A_2 \cap B \in \mathcal{E}$ e $A_1 \cap B \subset A_2 \cap B$; segue então que $(A_2 \cap B) \setminus (A_1 \cap B) \in \mathcal{E}$. Como $(A_2 \cap B) \setminus (A_1 \cap B) = (A_2 \setminus A_1) \cap B$, concluímos que $A_2 \setminus A_1$ está em (5.2.5). Para concluir a demonstração de que (5.2.5) é uma classe σ-aditiva, seja $(A_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência em (5.2.5) com $A_k \nearrow A$. Daí $A_k \cap B \in \mathcal{E}$, para todo $k \geq 1$ e $(A_k \cap B) \nearrow (A \cap B)$; segue então que $A \cap B \in \mathcal{E}$ e portanto A está em (5.2.5). Demonstramos então que (5.2.5) é uma classe σ-aditiva. Se o conjunto B pertence a $\mathcal{C}$ então $A \cap B \in \mathcal{C} \subset \mathcal{E}$, para todo $A \in \mathcal{C}$ e portanto (5.2.5) contém $\mathcal{C}$; concluímos então que (5.2.5) contém $\mathcal{E}$, isto é, $A \cap B \in \mathcal{E}$, para todo $A \in \mathcal{E}$ e todo $B \in \mathcal{C}$. Seja agora $B \in \mathcal{E}$ arbitrário. Pelo que acabamos de mostrar, (5.2.5) contém $\mathcal{C}$ e portanto contém $\mathcal{E}$; concluímos então que $A \cap B \in \mathcal{E}$, para todos $A, B \in \mathcal{E}$. □

Vejamos agora algumas aplicações interessantes dos Lemas 5.2.4 e 5.2.5.

5.2.6. LEMA. *Sejam $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$, $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ medidas finitas num σ-anel $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ uma classe fechada por interseções finitas tal que $\mathcal{A}$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{C}$. Se $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{C}$ então $\mu = \nu$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como vimos no Exemplo 5.2.2, a classe (5.2.1) formada pelos conjuntos onde μ e ν coincidem é uma classe σ-aditiva. Como (5.2.1) contém $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechada por interseções finitas, segue do Lema 5.2.5 que (5.2.1) contém $\mathcal{A}$. Logo $\mu = \nu$. □

O Lema 5.2.6 pode ser pensado como um lema de unicidade de extensão de medidas; de fato, um enunciado alternativo para o Lema 5.2.6 é o seguinte: uma medida finita μ numa classe de conjuntos $\mathcal{C}$ fechada por interseções finitas extende-se no máximo de uma maneira a uma medida finita no σ-anel gerado por $\mathcal{C}$. Logo adiante apresentaremos uma generalização desse resultado.

Outro resultado interessante é o seguinte lema de aproximação.

5.2.7. LEMA. *Seja* $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ *uma medida finita num* σ*-anel* $\mathcal{A}$ *e seja* $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ *um anel tal que* $\mathcal{A}$ *é o* σ*-anel gerado por* $\mathcal{R}$*. Então para todo* $A \in \mathcal{A}$ *e todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $B \in \mathcal{R}$ *tal que* $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$*. Em particular, pelo resultado do Exercício 5.12, temos* $\big|\mu(A) - \mu(B)\big| < \varepsilon$*.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere a classe de conjuntos:

$$\big\{A \in \mathcal{A} : \text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } B \in \mathcal{R} \text{ tal que } \mu(A \triangle B) < \varepsilon\big\}. \tag{5.2.6}$$

Evidentemente (5.2.6) contém o anel $\mathcal{R}$. Se mostrarmos que (5.2.6) é uma classe monotônica, a tese seguirá do Lema 5.2.4. Seja $(A_k)_{k\ge1}$ uma seqüência em (5.2.6) tal que $A_k \nearrow A$ (resp., tal que $A_k \searrow A$) e seja dado $\varepsilon > 0$. Temos que $A_k \triangle A = A \setminus A_k$ (resp., que $A_k \triangle A = A_k \setminus A$) e portanto $(A_k \triangle A) \searrow \emptyset$. Como a medida μ é finita, obtemos $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k \triangle A) = 0$ e portanto existe $k \ge 1$ tal que $\mu(A_k \triangle A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como A_k está em (5.2.6), existe $B \in \mathcal{R}$ tal que $\mu(A_k \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Mas (veja Exercício 5.11):

$$A \triangle B \subset (A \triangle A_k) \cup (A_k \triangle B)$$

e portanto, pelo item (e) do Lema 5.1.6:

$$\mu(A \triangle B) \le \mu(A \triangle A_k) + \mu(A_k \triangle B) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isso prova que A está em (5.2.6) e completa a demonstração. □

A hipótese de finitude das medidas nos Lemas 5.2.6 e 5.2.7 é muito restritiva. Vamos agora relaxar essa hipótese.

5.2.8. DEFINIÇÃO. Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos com $\emptyset \in \mathcal{C}$ e seja $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ uma medida em $\mathcal{C}$. Dizemos que um conjunto A (não necessariamente em $\mathcal{C}$) é *σ-finito com respeito a μ* se existe uma seqüência $(A_k)_{k\ge1}$ em $\mathcal{C}$ tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $\mu(A_k) < +\infty$, para todo $k \ge 1$. Dizemos que a medida μ é *σ-finita* se todo conjunto A *em* $\mathcal{C}$ é σ-finito com respeito a μ.

Evidentemente, se $A \in \mathcal{C}$ e $\mu(A) < +\infty$ então A é σ-finito com respeito a μ; em particular, toda medida finita é σ-finita. Note que se A é σ-finito com respeito a μ e $B \subset A$ então B também é σ-finito com respeito a μ. Em particular, se X é um conjunto tal que $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ e $X \in \mathcal{C}$ então μ é σ-finita se e somente se X é σ-finito com respeito a μ, isto é, se somente se existe uma seqüência $(A_k)_{k\ge1}$ em $\mathcal{C}$ tal que $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $\mu(A_k) < +\infty$, para todo $k \ge 1$.

5.2.9. OBSERVAÇÃO. Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos com $\emptyset \in \mathcal{C}$ e seja $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ uma medida em $\mathcal{C}$; denote por $\mathcal{A}$ o σ-anel gerado por $\mathcal{C}$. Se a medida μ é σ-finita então todo elemento A de $\mathcal{A}$ é σ-finito com respeito a μ. De fato, pelo resultado do Exercício 5.20, todo $A \in \mathcal{A}$ pode ser coberto por uma união enumerável de elementos de $\mathcal{C}$; mas cada elemento de $\mathcal{C}$ pode ser coberto por uma união enumerável de elementos de $\mathcal{C}$ de medida finita. Logo A pode ser coberto por uma união enumerável de elementos de $\mathcal{C}$ de medida finita. Vemos então que se $\bar{\mu} : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ é uma medida em $\mathcal{A}$ que estende μ então a σ-finitude de μ implica na σ-finitude de $\bar{\mu}$ (a recíproca não é verdadeira, como veremos no Exemplo 5.2.14).

5.2.10. Notação. Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos e X um conjunto arbitrário. Denotamos por $\mathcal{C}|_X$ a classe de conjuntos:

$$\mathcal{C}|_X = \big\{A \cap X : A \in \mathcal{C}\big\}.$$

Note que se a classe de conjuntos $\mathcal{C}$ é fechada por interseções finitas e se $X \in \mathcal{C}$ então:

$$\mathcal{C}|_X = \big\{A \in \mathcal{C} : A \subset X\big\} = \mathcal{C} \cap \wp(X).$$

Em particular, nesse caso, se $\emptyset \in \mathcal{C}$ e $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ é uma medida em $\mathcal{C}$ então a restrição de μ a $\mathcal{C}|_X$ também é uma medida.

5.2.11. Lema. *Se $\mathcal{A}$ é um σ-anel e X é um conjunto arbitrário então $\mathcal{A}|_X$ é um σ-anel. Além do mais, se $\mathcal{A}$ é o σ-anel gerado por uma classe de conjuntos $\mathcal{C}$ então $\mathcal{A}|_X$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{C}|_X$.*

Demonstração. A prova de que $\mathcal{A}|_X$ é um σ-anel é deixada a cargo do leitor (veja Exercício 5.18). Seja $\mathcal{B}$ o σ-anel gerado por $\mathcal{C}|_X$. Como $\mathcal{A}|_X$ é um σ-anel que contém $\mathcal{C}|_X$, temos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}|_X$. Para mostrar que $\mathcal{A}|_X$ está contido em $\mathcal{B}$, considere a coleção de conjuntos:

$$\big\{A \in \mathcal{A} : A \cap X \in \mathcal{B}\big\}. \tag{5.2.7}$$

Verifica-se diretamente que (5.2.7) é um σ-anel. Como (5.2.7) contém $\mathcal{C}$ e $\mathcal{A}$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{C}$, concluímos que (5.2.7) contém $\mathcal{A}$, ou seja, $A \cap X \in \mathcal{B}$, para todo $A \in \mathcal{A}$. Isso mostra que $\mathcal{A}|_X \subset \mathcal{B}$ e completa a demonstração. □

Estamos agora em condições de generalizar os Lemas 5.2.6 e 5.2.7.

5.2.12. Lema. *Sejam $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ medidas num σ-anel $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ uma classe fechada por interseções finitas tal que*[4] *$\emptyset \in \mathcal{C}$; suponha que $\mathcal{A}$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{C}$. Se $\mu|_{\mathcal{C}} = \nu|_{\mathcal{C}}$ e $A \in \mathcal{A}$ é σ-finito com respeito a $\mu|_{\mathcal{C}}$ então $\mu(A) = \nu(A)$. Em particular, pela Observação 5.2.9, se a medida $\mu|_{\mathcal{C}}$ é σ-finita e se $\mu|_{\mathcal{C}} = \nu|_{\mathcal{C}}$ então $\mu = \nu$.*

Demonstração. Seja $X \in \mathcal{C}$ com $\mu(X) < +\infty$. Afirmamos que μ e ν coincidem em $\mathcal{A}|_X$. De fato, $\mathcal{C}|_X$ é uma classe fechada por interseções finitas que gera o σ-anel $\mathcal{A}|_X$ (veja Lema 5.2.11); como μ e ν coincidem em $\mathcal{C}|_X \subset \mathcal{C}$, segue do Lema 5.2.6 aplicado às medida finitas $\mu|_{\mathcal{A}|_X}$ e $\nu|_{\mathcal{A}|_X}$ que μ e ν coincidem em $\mathcal{A}|_X$. Seja agora $A \in \mathcal{A}$ e suponha que A é σ-finito com

[4] A hipótese $\emptyset \in \mathcal{C}$ só foi colocada para que possamos dizer que $\mu|_{\mathcal{C}}$ é uma medida (recorde Definição 5.1.1). Note, no entanto, que essa hipótese não é nada restritiva já que $\mu(\emptyset) = \nu(\emptyset) = 0$ e que a classe $\mathcal{C}$ é fechada por interseções finitas se e somente se $\mathcal{C} \cup \{\emptyset\}$ o é; podemos então sempre substituir $\mathcal{C}$ por $\mathcal{C} \cup \{\emptyset\}$ se necessário.

respeito a $\mu|_{\mathcal{C}}$; mostremos que $\mu(A) = \nu(A)$. Seja $(X_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência em $\mathcal{C}$ com $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ e $\mu(X_k) < +\infty$, para todo $k \geq 1$. Para cada $k \geq 1$ seja $Y_k = X_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} X_i$, onde $X_0 = \emptyset$. Pelo resultado do Exercício 1.19, os conjuntos $(Y_k)_{k\geq 1}$ são dois a dois disjuntos e $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$. Temos $A = \bigcup_{k=1}^{\infty}(Y_k \cap A)$ e portanto:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Y_k \cap A), \quad \nu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(Y_k \cap A).$$

Mas para todo $k \geq 1$ temos $Y_k \cap A \in \mathcal{A} \cap \wp(X_k) = \mathcal{A}|_{X_k}$ e segue da primeira parte da demonstração que $\mu(Y_k \cap A) = \nu(Y_k \cap A)$, para todo $k \geq 1$. Logo $\mu(A) = \nu(A)$. $\square$

5.2.13. Corolário. *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos fechada por interseções finitas tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$. Se $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ é uma medida σ-finita então μ possui no máximo uma extensão a uma medida no σ-anel gerado por $\mathcal{C}$; uma tal extensão (caso exista) é automaticamente σ-finita.*

Demonstração. Segue do Lema 5.2.12 e da Observação 5.2.9. $\square$

Resultados sobre existência de extensões de medidas para σ-anéis serão estudados mais adiante na Seção 5.3.

5.2.14. Exemplo. Nas hipóteses do Lema 5.2.12 é realmente necessário supor que A seja σ-finito com respeito a $\mu|_{\mathcal{C}}$; assumir apenas a σ-finitude com respeito a μ e a ν não é suficiente. De fato, considere as medidas $\mu : \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ e $\nu : \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ definidas por:

$$\mu(A) = |A \cap \mathbb{Q}|, \quad \nu(A) = \big|A \cap \big(\mathbb{Q} \setminus \{0\}\big)\big|,$$

para todo $A \subset \mathbb{R}$, onde $|E| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ denota o número de elementos de um conjunto E. Seja $\mathcal{S}$ o semi-anel constituído pelos intervalos da forma $]a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ (veja (5.1.5)). Temos $\mu(A) = \nu(A) = +\infty$, para todo $A \in \mathcal{S}$, $A \neq \emptyset$. Se $\mathcal{A}$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{S}$ (pelo resultado do Exercício 5.9, $\mathcal{A}$ coincide com a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$) então as medidas $\mu|_{\mathcal{A}}$ e $\nu|_{\mathcal{A}}$ são ambas σ-finitas. De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$, o conjunto unitário $\{x\}$ está em $\mathcal{A}$ e:

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\};$$

além do mais, $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \nu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$, $\mu\big(\{x\}\big) = 1$ e $\nu\big(\{x\}\big) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. No entanto, temos $\mu|_{\mathcal{A}} \neq \nu|_{\mathcal{A}}$, já que $\mu\big(\{0\}\big) = 1$ e $\nu\big(\{0\}\big) = 0$.

Generalizamos agora o Lema 5.2.7.

5.2.15. Lema. *Seja $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma medida num σ-anel $\mathcal{A}$ e seja $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ um anel tal que $\mathcal{A}$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{R}$. Suponha que $A \in \mathcal{A}$ é σ-finito com respeito a $\mu|_{\mathcal{R}}$ (pela Observação 5.2.9, esse é o caso, por exemplo, se a medida $\mu|_{\mathcal{R}}$ é σ-finita). Se $\mu(A) < +\infty$ então para todo $\varepsilon > 0$ existe $B \in \mathcal{R}$ tal que $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$. Em particular, pelo resultado do Exercício 5.12, temos $\big|\mu(A) - \mu(B)\big| < \varepsilon$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{A}$ um conjunto σ-finito com respeito a $\mu|_{\mathcal{R}}$ tal que $\mu(A) < +\infty$; seja dado $\varepsilon > 0$. Seja $(X_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência em $\mathcal{R}$ com $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ e $\mu(X_k) < +\infty$, para todo $k \geq 1$. Para cada $k \geq 1$ seja $Y_k = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$, de modo que $Y_k \in \mathcal{R}$, $\mu(Y_k) < +\infty$ e $(A \setminus Y_k) \searrow \emptyset$. Como $\mu(A) < +\infty$, temos $\lim_{k\to\infty} \mu(A \setminus Y_k) = 0$ e portanto existe $k \geq 1$ tal que $\mu(A \setminus Y_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $A' = A \cap Y_k$; daí $A \bigtriangleup A' = A \setminus Y_k$ e portanto:

$$\mu(A \bigtriangleup A') < \frac{\varepsilon}{2},$$

e $A' \in \mathcal{A} \cap \wp(Y_k) = \mathcal{A}|_{Y_k}$. Vamos agora aplicar o Lema 5.2.7 à medida finita $\mu|_{\mathcal{A}|_{Y_k}}$; para isso, note que, pelo Exercício 5.18, $\mathcal{R}|_{Y_k}$ é um anel e, pelo Lema 5.2.11, $\mathcal{A}|_{Y_k}$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{R}|_{Y_k}$. Vemos então que existe $B \in \mathcal{R}|_{Y_k} \subset \mathcal{R}$ tal que $\mu(A' \bigtriangleup B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Daí (veja Exercício 5.11):

$$A \bigtriangleup B \subset (A \bigtriangleup A') \cup (A' \bigtriangleup B)$$

e portanto:

$$\mu(A \bigtriangleup B) \leq \mu(A \bigtriangleup A') + \mu(A' \bigtriangleup B) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que completa a demonstração. □

5.2.16. Exemplo. Sejam μ, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ definidos como no Exemplo 5.2.14; seja $\mathcal{R}$ o anel gerado por $\mathcal{S}$, de modo que $\mathcal{A}$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{R}$. Pelo Lema 5.1.21, todo elemento de $\mathcal{R}$ é uma união finita disjunta de elementos de $\mathcal{S}$ e portanto $\mu(A) = +\infty$, para todo $A \in \mathcal{R}$ com $A \neq \emptyset$. Temos que a medida $\mu|_{\mathcal{A}}$ é σ-finita (mas $\mu|_{\mathcal{R}}$ não é). Dado $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) < +\infty$ (por exemplo, se A é um subconjunto finito de $\mathbb{Q}$) então $\mu(A \bigtriangleup B) = +\infty$, para todo $B \in \mathcal{R}$ com $B \neq \emptyset$ (veja Exercício 5.12). Logo a tese do Lema 5.2.15 não é verdadeira para a medida $\mu|_{\mathcal{A}}$ e para o anel $\mathcal{R}$, embora $\mu|_{\mathcal{A}}$ seja σ-finita.

5.2.17. Exemplo. Seja $\mathcal{A} = \wp(\mathbb{N})$ e $\mathcal{R}$ o conjunto das partes finitas de $\mathbb{N}$; daí $\mathcal{R}$ é um anel e $\mathcal{A}$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{R}$. Seja $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ a medida de contagem (veja a Definição 2.2). Note que $\mu|_{\mathcal{R}}$ é uma medida finita (e portanto σ-finita). Dado $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) = +\infty$ então para todo $B \in \mathcal{R}$ temos $\mu(A \bigtriangleup B) = +\infty$. Vemos que a hipótese $\mu(A) < +\infty$ é essencial no Lema 5.2.15.

5.3. Medidas Exteriores e o Teorema da Extensão

A estratégia que nós usamos na Seção 1.4 para construir a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ foi a seguinte: nós definimos inicialmente a medida exterior de Lebesgue $\mathfrak{m}^* : \wp(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ (que não é sequer uma medida finitamente aditiva) e depois uma σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ de partes de $\mathbb{R}^n$ restrita a qual a medida exterior $\mathfrak{m}^*$ é uma medida. Essa estratégia trata-se na verdade de um caso particular de um procedimento geral. Nesta seção nós definiremos o conceito geral de medida exterior e mostraremos que a toda medida exterior pode-se associar naturalmente um σ-anel restrita ao qual a medida exterior é uma medida.

Começamos definindo as classes de conjuntos que servirão como domínio para as medidas exteriores.

5.3.1. DEFINIÇÃO. Uma classe de conjuntos $\mathcal{H}$ é dita um *σ-anel hereditário* se $\mathcal{H}$ é não vazia e satisfaz as seguintes condições:

(a) se $A \in \mathcal{H}$ e $B \subset A$ então $B \in \mathcal{H}$;
(b) se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{H}$ então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H}$.

Evidentemente todo σ-anel hereditário é um σ-anel.

5.3.2. EXEMPLO. Dado um conjunto arbitrário X então a coleção $\wp(X)$ de todas as partes de X é um σ-anel hereditário. A coleção de todos os subconjuntos enumeráveis de X também é um σ-anel hereditário. Note que se $\mathcal{H}$ é um σ-anel hereditário contido em $\wp(X)$ então $\mathcal{H} = \wp(X)$ se e somente se $X \in \mathcal{H}$.

5.3.3. DEFINIÇÃO. Seja $\mathcal{H}$ um σ-anel hereditário. Uma *medida exterior* em $\mathcal{H}$ é uma função $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ satisfazendo as seguintes condições:

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
(b) (*monotonicidade*) se $A, B \in \mathcal{H}$ e $A \subset B$ então $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
(c) (*σ-subaditividade*) se $(A_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência de elementos de $\mathcal{H}$ então:

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k). \tag{5.3.1}$$

Claramente, se $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ é uma medida exterior, então dados $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{H}$ temos:

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{t} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{t} \mu^*(A_k);$$

de fato, basta tomar $A_k = \emptyset$ para todo $k > t$ em (5.3.1).

5.3.4. EXEMPLO. Segue dos Lemas 1.4.4 e 1.4.5 que a medida exterior de Lebesgue $\mathfrak{m}^*$ é uma medida exterior no σ-anel hereditário $\wp(\mathbb{R}^n)$.

Usando a Proposição 1.4.53 como inspiração nós damos a seguinte:

5.3.5. DEFINIÇÃO. Sejam $\mathcal{H}$ um σ-anel hereditário e $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ uma medida exterior. Um conjunto $E \in \mathcal{H}$ é dito *μ^*-mensurável* se para todo $A \in \mathcal{H}$ vale a igualdade:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E). \tag{5.3.2}$$

Como $A = (A \cap E) \cup (A \setminus E)$, temos $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$, para todos $A, E \in \mathcal{H}$ e portanto (5.3.2) é na verdade equivalente a:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E).$$

5.3.6. Observação. Se $\mathfrak{m}^* : \wp(\mathbb{R}^n) \to [0,+\infty]$ denota a medida exterior de Lebesgue então segue da Proposição 1.4.53 que os conjuntos $\mathfrak{m}^*$-mensuráveis são precisamente os subconjuntos Lebesgue mensuráveis de $\mathbb{R}^n$.

5.3.7. Teorema. *Sejam $\mathcal{H}$ um σ-anel hereditário e $\mu^* : \mathcal{H} \to [0,+\infty]$ uma medida exterior. Então:*

(a) *a coleção $\mathfrak{M} \subset \mathcal{H}$ de todos os conjuntos μ^*-mensuráveis é um σ-anel;*

(b) *dados $A \in \mathcal{H}$ e uma seqüência $(E_k)_{k\ge1}$ de elementos dois a dois disjuntos de $\mathfrak{M}$ então:*

$$\mu^*\Big(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k); \tag{5.3.3}$$

(c) *a restrição de μ^* a $\mathfrak{M}$ é uma medida σ-aditiva;*

(d) *se $E \in \mathcal{H}$ é tal que $\mu^*(E) = 0$ então $E \in \mathfrak{M}$.*

Demonstração. Seja X um conjunto arbitrário tal que $A \subset X$, para todo $A \in \mathcal{H}$ (tome, por exemplo, $X = \bigcup_{A\in\mathcal{H}} A$). Convencionando que complementares são sempre tomados com respeito a X, podemos reescrever a condição (5.3.2) na forma mais conveniente:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\mathrm{c}}).$$

A demonstração do teorema será dividida em vários passos.

Passo 1. *Se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ então $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}$.*

Seja dado $A \in \mathcal{H}$. Usando o fato que E_1 e E_2 são μ^*-mensuráveis, obtemos:

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}}) = \mu^*(A \cap E_1)\\ &\quad + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2^{\mathrm{c}})\\ &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2) + \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}\big);\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

mas $A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2)$ e portanto:

$$\mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) \le \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2). \tag{5.3.5}$$

De (5.3.4) e (5.3.5) vem:

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathrm{c}} \cap E_2) + \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}\big)\\ &\ge \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) + \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathrm{c}}\big),\end{aligned}$$

o que prova que $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}$.

Passo 2. *Se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$, $A \in \mathcal{H}$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ então:*

$$\mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2). \tag{5.3.6}$$

Como $A \cap (E_1 \cup E_2) \in \mathcal{H}$ e $E_1 \in \mathfrak{M}$, temos:

$$\begin{aligned}\mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2)\big) = \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1\big) + \mu^*\big(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^{\mathrm{c}}\big)\\ = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2),\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Passo 3. *Se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ então:*

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2).$$

Basta tomar $A = E_1 \cup E_2$ em (5.3.6).

Passo 4. *Se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ e $E_1 \subset E_2$ então $E_2 \setminus E_1 \in \mathfrak{M}$.*
Seja dado $A \in \mathcal{H}$. Evidentemente:

$$\mu^*\big(A \cap (E_2 \setminus E_1)\big) = \mu^*(A \cap E_2 \cap E_1^{\mathrm{c}}); \tag{5.3.7}$$

como $E_1 \subset E_2$, temos $(E_2 \setminus E_1)^{\mathrm{c}} = E_1 \cup E_2^{\mathrm{c}}$ e portanto:

$$\begin{aligned}\mu^*\big(A \cap (E_2 \setminus E_1)^{\mathrm{c}}\big) = \mu^*\big((A \cap E_1) \cup (A \cap E_2^{\mathrm{c}})\big)\\ \le \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2^{\mathrm{c}}) = \mu^*(A \cap E_2 \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2^{\mathrm{c}}).\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Somando (5.3.7) e (5.3.8) obtemos:

$$\begin{aligned}\mu^*\big(A \cap (E_2 \setminus E_1)\big) + \mu^*\big(A \cap (E_2 \setminus E_1)^{\mathrm{c}}\big) \le \mu^*(A \cap E_2 \cap E_1^{\mathrm{c}}) + \mu^*(A \cap E_2 \cap E_1)\\ + \mu^*(A \cap E_2^{\mathrm{c}}) = \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_2^{\mathrm{c}}) = \mu^*(A),\end{aligned}$$

o que prova que $E_2 \setminus E_1 \in \mathfrak{M}$.

Passo 5. *Se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ então $E_2 \setminus E_1 \in \mathfrak{M}$.*
Pelo passo 1, temos $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}$; como $E_1 \subset E_1 \cup E_2$, segue do passo 4 que $(E_1 \cup E_2) \setminus E_1 \in \mathfrak{M}$. Mas $(E_1 \cup E_2) \setminus E_1 = E_2 \setminus E_1$.

Passo 6. *Se $(E_k)_{k \ge 1}$ é uma seqüência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathfrak{M}$ então $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{M}$.*
Usando indução e os passos 1 e 2 obtemos que $\bigcup_{k=1}^{t} E_k \in \mathfrak{M}$ e:

$$\mu^*\Big(A \cap \bigcup_{k=1}^{t} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{t} \mu^*(A \cap E_k),$$

para todo $A \in \mathcal{H}$ e todo $t \ge 1$; daí:

$$\begin{aligned}\mu^*(A) = \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{k=1}^{t} E_k\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{t} E_k\Big)^{\mathrm{c}}\Big)\\ = \Big(\sum_{k=1}^{t} \mu^*(A \cap E_k)\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{t} E_k\Big)^{\mathrm{c}}\Big).\end{aligned}$$

Como $A \cap \big(\bigcup_{k=1}^{t} E_k\big)^{\mathrm{c}} \supset A \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\big)^{\mathrm{c}}$, obtemos:

$$\mu^*(A) \ge \Big(\sum_{k=1}^{t} \mu^*(A \cap E_k)\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big)^{\mathrm{c}}\Big); \tag{5.3.9}$$

fazendo $t \to \infty$ em (5.3.9) vem:

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\ge \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k)\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big)^{\mathrm{c}}\Big) \\ &\ge \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big)^{\mathrm{c}}\Big) \ge \mu^*(A), \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

onde nas duas últimas desigualdades usamos a σ-subaditividade de μ^*. Isso prova que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{M}$.

Passo 7. *Se $(E_k)_{k\ge1}$ é uma seqüência em $\mathfrak{M}$ então $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{M}$.*

Para cada $k \ge 1$, seja $F_k = E_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} E_i$, onde $E_0 = \emptyset$. Segue dos passos 1 e 5 que $F_k \in \mathfrak{M}$, para todo $k \ge 1$. Além do mais, pelo resultado do Exercício 1.19, os conjuntos $(F_k)_{k\ge1}$ são dois a dois disjuntos e $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Segue então do passo 6 que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{M}$.

Passo 8. *O item (a) da tese do teorema vale.*

Segue dos passos 5 e 7, já que obviamente $\emptyset \in \mathfrak{M}$.

Passo 9. *O item (b) da tese do teorema vale.*

Segue de (5.3.10) que:

$$\mu^*(A) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k)\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big)^{\mathrm{c}}\Big), \tag{5.3.11}$$

para qualquer $A \in \mathcal{H}$ e para qualquer seqüência $(E_k)_{k\ge1}$ de elementos dois a dois disjuntos de $\mathfrak{M}$. A conclusão é obtida substituindo A por $A \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\big)$ em (5.3.11).

Passo 10. *O item (c) da tese do teorema vale.*

Basta fazer $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ em (5.3.3).

Passo 11. *O item (d) da tese do teorema vale.*

Sejam $E \in \mathcal{H}$ com $\mu^*(E) = 0$ e $A \in \mathcal{H}$. Segue da monotonicidade de μ^* que:

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\mathrm{c}}) \le \mu^*(E) + \mu^*(A) = \mu^*(A).$$

Logo E é μ^*-mensurável. □

5.3.8. Observação. Seja $\mu^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$ uma medida exterior, onde X é um conjunto arbitrário. É imediato que o próprio conjunto X é

μ^*-mensurável. Segue então do Teorema 5.3.7 que a coleção de conjuntos μ^*-mensuráveis é uma σ-álgebra de partes de X (veja o Exercício 5.3).

5.3.9. Exemplo. É bem possível que o σ-anel de conjuntos μ^*-mensuráveis associado a uma medida exterior μ^* seja completamente trivial. De fato, seja X um conjunto arbitrário e seja $\mathcal{H} \subset \wp(X)$ o σ-anel hereditário constituído pelos subconjuntos enumeráveis de X. Defina $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ fazendo:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} |A| + 1, & \text{se } A \neq \emptyset, \\ 0, & \text{se } A = \emptyset, \end{cases}$$

onde $|A| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ denota o número de elementos de A. É fácil ver que μ^* é uma medida exterior em $\mathcal{H}$. Seja $E \in \mathcal{H}$ com $E \neq \emptyset$ e $E \neq X$; podemos então escolher um ponto $x \in E$ e um ponto $y \in X \setminus E$. Tomando $A = \{x, y\} \in \mathcal{H}$ então:

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = 2 + 2 \neq 3 = \mu^*(A),$$

donde vemos que E não é μ^*-mensurável. Concluímos então que, se X é enumerável (de modo que $\mathcal{H} = \wp(X)$) então a σ-álgebra de conjuntos μ^*-mensuráveis é igual a $\{\emptyset, X\}$; se X é não enumerável então o σ-anel de conjuntos μ^*-mensuráveis é $\{\emptyset\}$.

5.3.10. Definição. Se $\mathcal{C}$ é uma classe de conjuntos arbitrária então o *σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{C}$* é o menor σ-anel hereditário $\mathcal{H}$ que contém $\mathcal{C}$, i.e., $\mathcal{H}$ é um σ-anel hereditário tal que:

(1) $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$;
(2) se $\mathcal{H}'$ é um σ-anel hereditário tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}'$ então $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$.

Dizemos também que $\mathcal{C}$ é um *conjunto de geradores* para o σ-anel hereditário $\mathcal{H}$.

A existência e unicidade do σ-anel hereditário gerado por uma classe de conjuntos $\mathcal{C}$ pode ser demonstrada usando exatamente o mesmo roteiro que foi descrito nos Exercícios 1.22, 5.6, 5.7 e 5.17. No entanto, nós mostraremos a existência do σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{C}$ exibindo explicitamente esse σ-anel hereditário (a unicidade do σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{C}$ é evidente). Se $\mathcal{C} = \emptyset$ então o σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{C}$ é $\mathcal{H} = \{\emptyset\}$; senão, temos o seguinte:

5.3.11. Lema. *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos não vazia. O σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{C}$ é igual a:*

$$\mathcal{H} = \Big\{ A : \textit{existe uma seqüência } (A_k)_{k \geq 1} \textit{ em } \mathcal{C} \textit{ com } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Big\}. \tag{5.3.12}$$

Demonstração. Pelo resultado do Exercício 5.20, $\mathcal{H}$ é um σ-anel que contém $\mathcal{C}$. Obviamente, se $A \in \mathcal{H}$ e $B \subset A$ então $B \in \mathcal{H}$, de modo que $\mathcal{H}$ é um σ-anel hereditário que contém $\mathcal{C}$. Para verificar a condição (2) que aparece na Definição 5.3.10, observe que se $\mathcal{H}'$ é um σ-anel hereditário que contém $\mathcal{C}$ então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{H}'$, para toda seqüência $(A_k)_{k\geq 1}$ de elementos de $\mathcal{C}$; logo todo subconjunto de $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ está em $\mathcal{H}'$, donde $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$. □

5.3.12. Exemplo. Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$ e seja dada uma aplicação $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ (não necessariamente uma medida) tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Seja $\mathcal{H}$ (veja (5.3.12)) o σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{C}$. Vamos definir uma medida exterior μ^* em $\mathcal{H}$ associada a μ. Para cada $A \in \mathcal{H}$, seja:

$$\mathcal{C}_\mu(A) = \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_k \in \mathcal{C},\ \text{para todo } k \geq 1 \Big\},$$

e defina:

$$\mu^*(A) = \inf \mathcal{C}_\mu(A).$$

Evidentemente, $\mu^*(A) \in [0, +\infty]$, para todo $A \in \mathcal{H}$ (note que $\mathcal{C}_\mu(A) \neq \emptyset$, já que $A \in \mathcal{H}$). Observe também que para todo $A \in \mathcal{C}$, temos:

$$\mu^*(A) \leq \mu(A); \tag{5.3.13}$$

de fato, basta tomar $A_1 = A$ e $A_k = \emptyset$ para todo $k \geq 2$ para ver que $\mu(A)$ está em $\mathcal{C}_\mu(A)$. Vamos mostrar que μ^* é uma medida exterior em $\mathcal{H}$. De (5.3.13) segue que $\mu^*(\emptyset) = 0$. Se $A, B \in \mathcal{H}$ e $A \subset B$ então $\mathcal{C}_\mu(B) \subset \mathcal{C}_\mu(A)$, donde $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, provando a monotonicidade de μ^*. Finalmente, provemos a σ-subaditividade de μ^*. Seja $(A_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência em $\mathcal{H}$. Dado $\varepsilon > 0$ então para todo $k \geq 1$ existe uma seqüência $(A_{ki})_{i\geq 1}$ em $\mathcal{C}$ tal que:

$$A_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ki} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{ki}) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Daí $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{ki}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{ki}) \in \mathcal{C}_\mu\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big)$; portanto:

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{ki}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)\Big) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, a σ-subaditividade de μ^* segue.

5.3.13. Definição. Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$ e seja dada uma aplicação $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ (não necessariamente uma medida) tal que $\mu(\emptyset) = 0$. Se $\mathcal{H}$ denota o σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{C}$ então a medida exterior $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ definida como no Exemplo 5.3.12 é chamada a *medida exterior determinada por* μ.

5.3.14. Exemplo. Se $\mathcal{C} \subset \wp(\mathbb{R}^n)$ é a classe dos blocos retangulares n-dimensionais e se $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ é a aplicação que associa a cada bloco retangular n-dimensional seu volume então o σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{C}$ é $\wp(\mathbb{R}^n)$ e a medida exterior μ^* determinada por μ coincide com a medida exterior de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Observamos que, mesmo se $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ é uma medida, é possível que tenhamos uma desigualdade estrita em (5.3.13) (veja Exercício 5.22). No entanto, temos o seguinte:

5.3.15. Lema. *Seja $\mathcal{S}$ um semi-anel e $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ uma medida em $\mathcal{S}$. Denote por $\mathcal{H}$ o σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{S}$ e por $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ a medida exterior determinada por μ. Então:*

(a) *$\mu^*(A) = \mu(A)$, para todo $A \in \mathcal{S}$;*
(b) *todo elemento de $\mathcal{S}$ é μ^*-mensurável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{R}$ o anel gerado por $\mathcal{S}$ e seja $\tilde{\mu} : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ a única medida em $\mathcal{R}$ que estende μ (veja Teorema 5.1.23). Nós vamos mostrar que $\mu^*(A) = \tilde{\mu}(A)$, para todo $A \in \mathcal{R}$; isso implicará em particular que o item (a) vale. Seja $A \in \mathcal{R}$ e sejam $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{S}$ dois a dois disjuntos de modo que $A = \bigcup_{k=1}^{t} A_k$ (veja Lema 5.1.21). Tomando $A_k = \emptyset$ para $k > t$ concluímos que:

$$\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{t} \mu(A_k) = \tilde{\mu}(A).$$

Por outro lado, se $(B_k)_{k\ge1}$ é uma seqüência em $\mathcal{S}$ tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ então segue do item (f) do Lema 5.1.6 aplicado à medida $\tilde{\mu}$ que:

$$\tilde{\mu}(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k),$$

donde $\tilde{\mu}(A) \le \mu^*(A)$. Provamos então que $\mu^*(A) = \tilde{\mu}(A)$. Seja agora $E \in \mathcal{S}$ e provemos que E é μ^*-mensurável. Dado $A \in \mathcal{H}$ arbitrariamente, devemos verificar que $\mu^*(A) \ge \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$. Para isso, é suficiente mostrar que para toda seqüência $(A_k)_{k\ge1}$ em $\mathcal{S}$ com $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ vale a desigualdade:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \ge \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E). \tag{5.3.14}$$

Temos $A_k \cap E, A_k \setminus E \in \mathcal{R}$ e $A_k = (A_k \cap E) \cup (A_k \setminus E)$, para todo $k \ge 1$ e portanto:

$$\mu(A_k) = \tilde{\mu}(A_k) = \tilde{\mu}(A_k \cap E) + \tilde{\mu}(A_k \setminus E) = \mu^*(A_k \cap E) + \mu^*(A_k \setminus E);$$

daí:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k \cap E) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k \setminus E). \tag{5.3.15}$$

Como $A \cap E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap E)$ e $A \setminus E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus E)$, segue da monotonicidade e da σ-subaditividade de μ^* que:

$$\mu^*(A \cap E) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k \cap E), \quad \mu^*(A \setminus E) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k \setminus E). \tag{5.3.16}$$

De (5.3.15) e (5.3.16) segue (5.3.14), o que prova que E é μ^*-mensurável. □

Como conseqüência direta do Lema 5.3.15 e do Teorema 5.3.7 obtemos o seguinte:

5.3.16. TEOREMA (teorema da extensão). *Seja $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ uma medida num semi-anel $\mathcal{S}$. Então μ estende-se a uma medida no σ-anel gerado por $\mathcal{S}$; se μ é σ-finita então essa extensão é única e σ-finita.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja μ^* a medida exterior determinada por μ; pelo Teorema 5.3.7, a coleção $\mathfrak{M}$ dos conjuntos μ^*-mensuráveis é um σ-anel e a restrição de μ^* a $\mathfrak{M}$ é uma medida. Mas, pelo Lema 5.3.15, $\mathfrak{M}$ contém $\mathcal{S}$ e μ^* é uma extensão de μ; logo $\mathfrak{M}$ contém o σ-anel gerado por $\mathcal{S}$ e a restrição de μ^* a esse σ-anel é uma medida que estende μ. Se μ é σ-finita então essa extensão é única e σ-finita, pelo Corolário 5.2.13. □

5.3.17. EXEMPLO. Seja $\mathcal{S}$ o semi-anel constituído pelos intervalos da forma $]a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ (veja (5.1.5)) e seja $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ definida por $\mu\big(\,]a, b]\,\big) = b - a$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \le b$. Segue da Proposição 5.1.32 que μ é uma medida em $\mathcal{S}$. O σ-anel $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gerado por $\mathcal{S}$ é precisamente a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ (veja Exercício 5.9). Como μ é finita (e portanto σ-finita), o Teorema 5.3.16 nos diz que μ estende-se de modo único a uma medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Note que a medida de Lebesgue $\mathfrak{m} : \mathcal{M}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ construída na Seção 1.4 restrita ao σ-anel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é uma medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ que estende μ. Concluímos então que a restrição da medida de Lebesgue $\mathfrak{m}$ a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é precisamente a única extensão da medida μ ao σ-anel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

5.3.18. EXEMPLO. Sejam $\mathcal{S}$ o semi-anel constituído pelos intervalos da forma $]a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ (veja (5.1.5)), $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua à direita e $\mu_F : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ definida por $\mu_F\big(\,]a, b]\,\big) = F(b) - F(a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \le b$. Segue da Proposição 5.1.32 que μ_F é uma medida em $\mathcal{S}$. Como μ_F é finita (e portanto σ-finita), o Teorema 5.3.16 nos diz que μ_F estende-se de modo único a uma medida (também σ-finita) no σ-anel $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gerado por $\mathcal{S}$. Vamos denotar essa extensão de μ_F também por μ_F. A medida $\mu_F : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ é chamada a *medida de Lebesgue–Stieltjes* associada à função crescente e contínua à direita $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Note que se $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ é uma medida arbitrária que seja finita sobre intervalos limitados então a Proposição 5.1.16 nos diz que existe uma função crescente $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mu_F = \mu|_{\mathcal{S}}$; a função F é única, a menos da possível adição de constantes. Como $\mu|_{\mathcal{S}}$ é uma medida σ-aditiva, a Proposição 5.1.32 nos diz que F é contínua à direita. Temos portanto que μ é a única extensão de $\mu_F : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Concluímos então que *toda medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ que seja finita sobre intervalos limitados é a medida de Lebesgue–Stieltjes associada a alguma função crescente e contínua à direita $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; a função F é única, a menos da possível adição de constantes.*

Note que se $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ é uma medida num semi-anel $\mathcal{S}$ então a extensão de μ que construímos está definida num σ-anel $\mathfrak{M}$ que pode ser maior do que o σ-anel gerado por $\mathcal{S}$. Por exemplo, se $\mathcal{S}$ e μ são definidos como no Exemplo 5.3.17 então o σ-anel gerado por $\mathcal{S}$ é a σ-álgebra de Borel da reta, mas o σ-anel $\mathfrak{M}$ de conjuntos μ^*-mensuráveis coincide com a σ-álgebra de conjuntos Lebesgue mensuráveis (veja Exercício 5.24 e Observação 5.3.6).

Vamos agora investigar um pouco mais a fundo o σ-anel $\mathfrak{M}$ e a extensão de μ definida em $\mathfrak{M}$.

5.3.19. LEMA. *Sejam $\mathcal{S}$ um semi-anel, $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ uma medida em $\mathcal{S}$, $\mathcal{H}$ o σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{S}$, $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ a medida exterior determinada por μ, $\mathfrak{M}$ o σ-anel de conjuntos μ^*-mensuráveis e $\mathcal{A}$ o σ-anel gerado por $\mathcal{S}$. Então:*

(a) *para todo $A \in \mathcal{H}$ existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset E$ e $\mu^*(A) = \mu^*(E)$;*
(b) *se $A \in \mathfrak{M}$ é σ-finito com respeito à medida $\mu^*|_{\mathfrak{M}}$ então existem $E, W \in \mathcal{A}$ tais que $W \subset A \subset E$, e $\mu^*(A \setminus W) = \mu^*(E \setminus A) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Começamos provando o item (a). Seja $A \in \mathcal{H}$. Para todo $n \geq 1$ existe uma seqüência $(A_{nk})_{k\geq 1}$ em $\mathcal{S}$ tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{n}$; se $A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}$ então $A_n \in \mathcal{A}$, $A \subset A_n$ e da σ-subaditividade de μ^* vem:

$$\mu^*(A_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_{nk}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{n}.$$

Tomando $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ então $E \in \mathcal{A}$, $A \subset E$ e:

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(E) \leq \mu^*(A_n) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{n},$$

para todo $n \geq 1$; daí $\mu^*(E) = \mu^*(A)$, o que prova o item (a). Passemos à prova do item (b). Seja $A \in \mathfrak{M}$ um conjunto σ-finito com respeito à medida $\mu^*|_{\mathfrak{M}}$. Existe então uma seqüência $(X_k)_{k\geq 1}$ em $\mathfrak{M}$ com $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ e $\mu^*(X_k) < +\infty$, para todo $k \geq 1$. Para cada $k \geq 1$, como $A \cap X_k \in \mathfrak{M} \subset \mathcal{H}$, o item (a) nos dá $E_k \in \mathcal{A}$ com $A \cap X_k \subset E_k$ e $\mu^*(A \cap X_k) = \mu^*(E_k)$. Como $A \cap X_k, E_k \in \mathfrak{M}$, $\mu^*|_{\mathfrak{M}}$ é uma medida e $\mu^*(A \cap X_k) < +\infty$, obtemos:

$$\mu^*\big(E_k \setminus (A \cap X_k)\big) = \mu^*(E_k) - \mu^*(A \cap X_k) = 0,$$

para todo $k \geq 1$. Seja $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$. Evidentemente:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap X_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E;$$

além do mais:

$$E \setminus A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(E_k \setminus (A \cap X_k)\big),$$

e portanto:

$$\mu^*(E \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\big(E_k \setminus (A \cap X_k)\big) = 0.$$

Vamos agora mostrar a existência de $W \in \mathcal{A}$ com $W \subset A$ e $\mu^*(A \setminus W) = 0$. Como $E \setminus A \in \mathcal{H}$, o item (a) nos dá $N \in \mathcal{A}$ com $E \setminus A \subset N$ e:

$$\mu^*(N) = \mu^*(E \setminus A) = 0.$$

Tome $W = E \setminus N$; temos que $W \in \mathcal{A}$ e $W \subset A$. Além do mais, $A \setminus W \subset N$ e portanto $\mu^*(A \setminus W) \le \mu^*(N) = 0$. Isso completa a demonstração. □

5.3.20. Observação. Pode ser interessante para o leitor comparar o enunciado do Lema 5.3.19 aos enunciados dos Lemas 1.4.50, 1.4.28 e do Corolário 1.4.31.

Vimos no Exemplo 5.2.14 que uma medida não σ-finita μ num semi-anel $\mathcal{S}$ pode admitir extensões σ-finitas para o σ-anel gerado por $\mathcal{S}$. No entanto, se consideramos apenas a forma específica de construir extensões que foi desenvolvida nesta seção então temos o seguinte:

5.3.21. Lema. *Sob as condições do Lema 5.3.19, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *a medida $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ é σ-finita;*
(b) *a medida $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ é σ-finita;*
(c) *a medida $\mu^*|_{\mathfrak{M}}$ é σ-finita.*

Demonstração.

- (a)⇒(b).
  Segue da Observação 5.2.9.

- (b)⇒(c).
  Dado $A \in \mathfrak{M}$ então $A \in \mathcal{H}$ e portanto A está contido numa união enumerável de elementos de $\mathcal{S}$; segue então que A está contido num elemento de $\mathcal{A}$. A conclusão é obtida observando que todo elemento de $\mathcal{A}$ está contido numa união enumerável de elementos de $\mathcal{A}$ de medida finita.

- (c)⇒(a).
  Dado $A \in \mathcal{S}$ então $A \in \mathfrak{M}$ e portanto existe uma seqüência $(A_k)_{k\ge1}$ em $\mathfrak{M}$ tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $\mu^*(A_k) < +\infty$, para todo $k \ge 1$. Pela definição de μ^*, se $\mu^*(A_k) < +\infty$ então A_k está contido numa união enumerável de elementos de $\mathcal{S}$ de medida finita; logo A está contido numa união enumerável de elementos de $\mathcal{S}$ de medida finita. □

5.3.22. Exemplo. Seja X um conjunto não vazio. Considere o semi-anel $\mathcal{S} = \{\emptyset, X\}$ e a medida $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ definida por $\mu(\emptyset) = 0$ e $\mu(X) = +\infty$. Temos que o σ-anel $\mathcal{A}$ gerado por $\mathcal{S}$ é igual a $\mathcal{S}$ e o σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{S}$ é igual a $\mathcal{H} = \wp(X)$. É fácil ver que a medida exterior $\mu^* : \wp(X) \to [0, +\infty]$ determinada por μ é dada por $\mu^*(\emptyset) = 0$ e $\mu^*(A) = +\infty$, para todo $A \subset X$ não vazio. Temos então que o σ-anel $\mathfrak{M}$ de conjuntos μ^*-mensuráveis é igual a $\wp(X)$. Esse exemplo ilustra a necessidade da hipótese de σ-finitude no item (b) do Lema 5.3.19.

5.3.1. Completamento de medidas. Seja $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma medida num σ-anel $\mathcal{A}$. É perfeitamente possível que exista um conjunto $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) = 0$ tal que nem todo subconjunto de A está em $\mathcal{A}$.

5.3.23. DEFINIÇÃO. Uma medida $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ num σ-anel $\mathcal{A}$ é dita *completa* se para todo $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) = 0$ e para todo $B \subset A$ temos $B \in \mathcal{A}$.

5.3.24. PROPOSIÇÃO. *Seja $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ uma medida exterior num σ-anel hereditário $\mathcal{H}$. Se $\mathfrak{M}$ denota a coleção dos conjuntos μ^*-mensuráveis então a medida $\mu^*|_{\mathfrak{M}}$ é completa.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue diretamente do item (d) do Teorema 5.3.7. $\square$

5.3.25. LEMA. *Seja $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma medida num σ-anel $\mathcal{A}$. A classe de conjuntos:*

$$\overline{\mathcal{A}} = \big\{A \cup N : A \in \mathcal{A} \text{ e existe } M \in \mathcal{A} \text{ com } N \subset M \text{ e } \mu(M) = 0\big\}$$

é um σ-anel que contém $\mathcal{A}$ e existe uma única medida $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ em $\overline{\mathcal{A}}$ que estende μ. A medida $\bar{\mu}$ é a menor extensão completa *de μ, no sentido que:*

- *$\bar{\mu}$ é uma medida completa;*
- *se $\mu' : \mathcal{A}' \to [0, +\infty]$ é uma medida completa num σ-anel $\mathcal{A}'$ contendo $\mathcal{A}$ e se μ' estende μ então $\mathcal{A}'$ contém $\overline{\mathcal{A}}$ e μ' estende $\bar{\mu}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Evidentemente $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$. Seja $(A_k \cup N_k)_{k \ge 1}$ uma seqüência em $\overline{\mathcal{A}}$, onde para cada $k \ge 1$, $A_k \in \mathcal{A}$ e existe $M_k \in \mathcal{A}$ com $N_k \subset M_k$ e $\mu(M_k) = 0$. Temos:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cup N_k) = \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k\Big) \in \overline{\mathcal{A}}, \tag{5.3.17}$$

já que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \in \mathcal{A}$ e:

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_k) = 0.$$

Sejam $A_1 \cup N_1, A_2 \cup N_2 \in \overline{\mathcal{A}}$, com $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $N_1 \subset M_1$, $N_2 \subset M_2$, $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ e $\mu(M_1) = \mu(M_2) = 0$. Se $A = A_1 \setminus (A_2 \cup M_2)$ então $A \in \mathcal{A}$ e:

$$A \subset (A_1 \cup N_1) \setminus (A_2 \cup N_2);$$

podemos então escrever:

$$(A_1 \cup N_1) \setminus (A_2 \cup N_2) = A \cup N,$$

onde $N = [(A_1 \cup N_1) \setminus (A_2 \cup N_2)] \setminus A$. É fácil ver que $N \subset N_1 \cup M_2 \subset M_1 \cup M_2$. Como $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{A}$ e $\mu(M_1 \cup M_2) = 0$, segue que $(A_1 \cup N_1) \setminus (A_2 \cup N_2) \in \overline{\mathcal{A}}$.

Isso prova que $\overline{\mathcal{A}}$ é um σ-anel. Se $\bar{\mu}$ é uma medida em $\overline{\mathcal{A}}$ que estende μ então:

$$\mu(A) = \bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(A \cup N) \leq \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(N) \leq \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(M) = \mu(A),$$

para todos $A, M \in \mathcal{A}$, $N \subset M$, com $\mu(M) = 0$; daí:

$$\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A), \tag{5.3.18}$$

para todos $A, M \in \mathcal{A}$, $N \subset M$, com $\mu(M) = 0$. Isso prova a unicidade de $\bar{\mu}$; para provar a existência, nós usaremos a igualdade (5.3.18) para definir $\bar{\mu}$ em $\overline{\mathcal{A}}$. Para verificar que $\bar{\mu}$ está de fato bem definida, devemos mostrar que $\mu(A_1) = \mu(A_2)$, sempre que $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$, $N_1 \subset M_1$, $N_2 \subset M_2$, $A_1, A_2, M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ e $\mu(M_1) = \mu(M_2) = 0$. Temos:

$$A_1 \bigtriangleup A_2 \subset N_1 \cup N_2 \subset M_1 \cup M_2,$$

donde $\mu(A_1 \bigtriangleup A_2) = 0$; segue então do resultado do Exercício 5.12 que $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. Concluímos que $\bar{\mu}$ está bem definida e é claro que $\bar{\mu}$ estende μ. Para verificar que $\bar{\mu}$ é uma medida em $\overline{\mathcal{A}}$, seja $(A_k \cup N_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência de elementos dois a dois disjuntos de $\overline{\mathcal{A}}$, onde para cada $k \geq 1$, $A_k \in \mathcal{A}$ e existe $M_k \in \mathcal{A}$ com $N_k \subset M_k$ e $\mu(M_k) = 0$. Temos:

$$\bar{\mu}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cup N_k)\Big) \overset{(5.3.17)}{=} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_k \cup N_k),$$

o que prova que $\bar{\mu}$ é uma medida. Vejamos que $\bar{\mu}$ é completa. Sejam dados $A, M \in \mathcal{A}$, $N \subset M$ com $\mu(M) = 0$ e $\bar{\mu}(A \cup N) = 0$; daí $\mu(A) = 0$. Se B é um subconjunto de $A \cup N$ então $B = \emptyset \cup B$, onde $\emptyset \in \mathcal{A}$, $B \subset A \cup M \in \mathcal{A}$ e $\mu(A \cup M) = 0$. Logo $B \in \overline{\mathcal{A}}$ e a medida $\bar{\mu}$ é completa. Finalmente, seja $\mu' : \mathcal{A}' \to [0, +\infty]$ uma medida completa que estende μ, definida num σ-anel $\mathcal{A}'$. Dados $A, M \in \mathcal{A}$, $N \subset M$ com $\mu(M) = 0$ então $A, M \in \mathcal{A}'$ e $\mu'(M) = 0$; como μ' é completa e $N \subset M$, temos $N \in \mathcal{A}'$ e portanto $A \cup N \in \mathcal{A}'$. Isso prova que $\mathcal{A}'$ contém $\overline{\mathcal{A}}$. Como a restrição de μ' a $\overline{\mathcal{A}}$ é uma medida em $\overline{\mathcal{A}}$ que estende μ, vemos que essa restrição deve coincidir com $\bar{\mu}$; logo μ' é uma extensão de $\bar{\mu}$. Isso completa a demonstração. $\square$

5.3.26. Definição. A medida $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ cuja existência e unicidade é garantida pelo Lema 5.3.25 é chamada o *completamento* da medida μ.

5.3.27. Observação. Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida (i.e., X é um conjunto, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X e μ é uma medida em $\mathcal{A}$) e se $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ é o completamento de μ então $\overline{\mathcal{A}}$ é uma σ-álgebra de partes de X, já que $\overline{\mathcal{A}}$ é um σ-anel e $X \in \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ (veja Exercício 5.3). Logo $(X, \overline{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ também é um espaço de medida; nós dizemos então que $(X, \overline{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ é o *completamento* de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

5.3.28. Proposição. *Sob as condições do Lema 5.3.19, se a medida $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ é σ-finita então a medida $\mu^*|_{\mathfrak{M}}$ é o completamento da medida $\mu^*|_{\mathcal{A}}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pela Proposição 5.3.24, a medida $\mu^*|_{\mathfrak{M}}$ é uma extensão completa de $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ e portanto é uma extensão do completamento de $\mu^*|_{\mathcal{A}}$. Para mostrar que $\mu^*|_{\mathfrak{M}}$ é o completamento de $\mu^*|_{\mathcal{A}}$, devemos verificar que para todo $A \in \mathfrak{M}$ existem $W, M \in \mathcal{A}$ e $N \subset M$ com $A = W \cup N$ e $\mu^*(M) = 0$. Como μ é σ-finita, temos que A é σ-finito com respeito a $\mu^*|_{\mathfrak{M}}$ (veja Lema 5.3.21) e portanto, pelo Lema 5.3.19, existe $W \in \mathcal{A}$ com $W \subset A$ e $\mu^*(A \setminus W) = 0$. Tome $N = A \setminus W$, de modo que $A = W \cup N$. Aplicando novamente o Lema 5.3.19 obtemos $M \in \mathcal{A}$ com $N \subset M$ e $\mu^*(M) = \mu^*(N) = 0$. Isso completa a demonstração. □

Se μ e $\mathcal{S}$ são definidos como no Exemplo 5.3.17 e se μ^* é a medida exterior determinada por μ então a σ-álgebra $\mathfrak{M}$ de conjuntos μ^*-mensuráveis coincide com a σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ de subconjuntos Lebesgue mensuráveis da reta e a restrição de μ^* a $\mathfrak{M}$ coincide exatamente com a medida de Lebesgue $\mathfrak{m}$. Temos duas maneiras de verificar a validade dessa afirmação. Uma delas segue da Observação 5.3.6 usando o resultado do Exercício 5.24. A outra é a seguinte; vimos no Exemplo 5.3.17 que se $\mathcal{A}$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{S}$ então $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ coincide com a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ e a restrição de μ^* a $\mathcal{A}$ coincide com a restrição da medida de Lebesgue a $\mathcal{A}$. A Proposição 5.3.28 nos diz que $\mu^*|_{\mathfrak{M}}$ é o completamento de $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ e o resultado do Exercício 1.17 nos diz que a medida de Lebesgue é o completamento da restrição da medida de Lebesgue à σ-álgebra de Borel. Logo $\mu^*|_{\mathfrak{M}}$ é precisamente a medida de Lebesgue.

Vemos então que a medida de Lebesgue na reta poderia ser introduzida usando apenas a teoria desenvolvida neste capítulo, sem que nenhuma menção fosse feita a resultados do Capítulo 1. De fato, podemos definir μ e $\mathcal{S}$ como no Exemplo 5.3.17, tomar a única extensão de μ a uma medida no σ-anel $\mathcal{A}$ gerado por $\mathcal{S}$ (Teorema 5.3.16) e depois tomar o completamento dessa extensão; esse completamento é exatamente a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Alternativamente, consideramos a medida exterior μ^* determinada por μ e tomamos a restrição de μ^* ao σ-anel de conjuntos μ^*-mensuráveis; o resultado também é a medida de Lebesgue.

Usando a teoria que desenvolveremos no Capítulo 6 nós veremos que também a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ pode ser construída sem a utilização da teoria desenvolvida no Capítulo 1.

Exercícios para o Capítulo 5

Medidas em Classes de Conjuntos.

EXERCÍCIO 5.1. Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos tal que $\emptyset \in \mathcal{C}$ e seja dada uma função $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ tal que, se $(A_k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{C}$ *tal que* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ *também está em* $\mathcal{C}$, então a igualdade (5.1.2) é satisfeita. Mostre que se $\mu(\emptyset) \neq 0$ então $\mu(A) = +\infty$, para todo $A \in \mathcal{C}$.

Exercício 5.2. Considere a classe de conjuntos:

$$\mathcal{C} = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1,2\}\big\}$$

e defina $\mu : \mathcal{C} \to [0,+\infty]$ fazendo:

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu\big(\{0\}\big) = \mu\big(\{1\}\big) = \mu\big(\{2\}\big) = 1, \quad \mu\big(\{0,1,2\}\big) = 2.$$

Mostre que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, para todos $A, B \in \mathcal{C}$ tais que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B \in \mathcal{C}$. No entanto, observe que μ não é uma medida finitamente aditiva em $\mathcal{C}$.

Exercício 5.3. Seja X um conjunto e $\mathcal{R} \subset \wp(X)$ uma coleção de partes de X. Mostre que $\mathcal{R}$ é uma álgebra (resp., uma σ-álgebra) de partes de X se e somente se $\mathcal{R}$ é um anel (resp., um σ-anel) tal que $X \in \mathcal{R}$.

Exercício 5.4. Seja X um conjunto e $\mathcal{S} \subset \wp(X)$ uma coleção de partes de X. Dizemos que $\mathcal{S}$ é uma *semi-álgebra* de partes de X se $\mathcal{S}$ é um semi-anel e se $X \in \mathcal{S}$. Mostre que $\mathcal{S} \subset \wp(X)$ é uma semi-álgebra de partes de X se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

(a) $A \cap B \in \mathcal{S}$, para todos $A, B \in \mathcal{S}$;
(b) se $A \in \mathcal{S}$ então existem $k \geq 1$ e conjuntos $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{S}$, dois a dois disjuntos, de modo que $A^{\mathrm{c}} = X \setminus A = \bigcup_{i=1}^k C_i$;
(c) $X \in \mathcal{S}$.

Se X é um conjunto finito com mais de um elemento e se $\mathcal{S} \subset \wp(X)$ é definido por:

$$\mathcal{S} = \{\emptyset\} \cup \big\{\{x\} : x \in X\big\},$$

mostre que $\mathcal{S}$ é uma classe não vazia de subconjuntos de X satisfazendo as condições (a) e (b), mas que $\mathcal{S}$ não é uma semi-álgebra de partes de X.

Exercício 5.5. Sejam $\mathcal{A}$ um anel e A, B conjuntos. Mostre que se $A \in \mathcal{A}$ e $A \triangle B \in \mathcal{A}$ então também $B \in \mathcal{A}$.

Exercício 5.6. Seja X um conjunto arbitrário.

(a) Se $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ é uma família não vazia de álgebras de partes de X, mostre que $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ também é uma álgebra de partes de X.
(b) Mostre que, fixada uma coleção $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ de partes de X, existe *no máximo uma* álgebra $\mathcal{A}$ de partes de X satisfazendo as propriedades (1) e (2) que aparecem na Definição 5.1.18.
(c) Dada uma coleção arbitrária $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ de partes de X, mostre que a interseção de todas as álgebras de partes de X que contém $\mathcal{C}$ é uma álgebra de partes de X que satisfaz as propriedades (1) e (2) que aparecem na Definição 5.1.18 (note que sempre existe ao menos uma álgebra de partes de X contendo $\mathcal{C}$, a saber, $\wp(X)$).

Exercício 5.7.

(a) Se $(\mathcal{R}_i)_{i \in I}$ é uma família não vazia de anéis (resp., de σ-anéis), mostre que $\mathcal{R} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_i$ também é um anel (resp., σ-anel).
(b) Mostre que, fixada uma classe de conjuntos $\mathcal{C}$, existe *no máximo um* anel (resp., σ-anel) $\mathcal{R}$ satisfazendo as propriedades (1) e (2) que aparecem na Definição 5.1.19.

(c) Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos arbitrária e seja X um conjunto tal que $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ (por exemplo, tome $X = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$). Mostre que a interseção de todos os anéis (resp., σ-anéis) $\mathcal{R} \subset \wp(X)$ que contém $\mathcal{C}$ é um anel (resp., σ-anel) que satisfaz as propriedades (1) e (2) que aparecem na Definição 5.1.19 (note que sempre existe ao menos um anel (resp., σ-anel) $\mathcal{R} \subset \wp(X)$ contendo $\mathcal{C}$, a saber, $\wp(X)$).

Exercício 5.8. Sejam X um conjunto e $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de X. Mostre que o anel (resp., o σ-anel) gerado por $\mathcal{C}$ coincide com a álgebra (resp., a σ-álgebra) de partes de X gerada por $\mathcal{C}$ se e somente se X pertence ao anel (resp., ao σ-anel) gerado por $\mathcal{C}$ (esse é o caso, por exemplo, se $X \in \mathcal{C}$).

Exercício 5.9. Mostre que o σ-anel gerado pelo semi-anel $\mathcal{S}$ constituído pelos intervalos da forma $]a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ (veja (5.1.5)) coincide com a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.

Exercício 5.10. Sejam:

$$\mathcal{S}_1 = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}, \quad \mathcal{S}_2 = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\big\}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ são semi-anéis, mas $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ não é um semi-anel.
(b) Seja $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. Mostre que não existe um semi-anel $\mathcal{S}$ contendo $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ para todo semi-anel $\mathcal{S}'$ contendo $\mathcal{C}$.

Exercício 5.11. Dados conjuntos A, B e C, mostre que:

$$A \bigtriangleup C \subset (A \bigtriangleup B) \cup (B \bigtriangleup C).$$

Exercício 5.12. Seja $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ uma medida finitamente aditiva num semi-anel $\mathcal{S}$ e sejam $A, B \in \mathcal{S}$ com $A \bigtriangleup B \in \mathcal{S}$. Se $\mu(A) < +\infty$ ou $\mu(B) < +\infty$, mostre que:

$$\big|\mu(A) - \mu(B)\big| \le \mu(A \bigtriangleup B).$$

Conclua que se $\mu(A \bigtriangleup B) < +\infty$ então $\mu(A)$ é finito se e somente se $\mu(B)$ é finito.

Definição 5.1. Sejam I um conjunto e $<$ uma relação binária em I. Dizemos que $<$ é uma *relação de ordem total* no conjunto I se as seguintes condições são satisfeitas:

- (*anti-reflexividade*) para todo $a \in I$, não é o caso que $a < a$;
- (*transitividade*) para todos $a, b, c \in I$, se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$;
- (*tricotomia*) dados $a, b \in I$ então $a < b$, $b < a$ ou $a = b$.

Diz-se então que o par $(I, <)$ é um *conjunto totalmente ordenado*. Para $a, b \in I$, nós escrevemos $a > b$ quando $b < a$, $a \le b$ quando $a < b$ ou $a = b$ e escrevemos $a \geq b$ quando $b \leq a$. Definimos também:

$$\begin{aligned} [a,b] &= \big\{x \in I : a \leq x \text{ e } x \leq b\big\}, \\ ]a,b] &= \big\{x \in I : a < x \text{ e } x \leq b\big\}, \\ [a,b[&= \big\{x \in I : a \leq x \text{ e } x < b\big\}, \\ ]a,b[&= \big\{x \in I : a < x \text{ e } x < b\big\}, \end{aligned}$$

para todos $a, b \in I$.

Exercício 5.13. Seja $(I, <)$ um conjunto totalmente ordenado não vazio.

(a) Mostre que a classe de conjuntos:

$$\mathcal{S} = \big\{\,]a,b] : a, b \in I,\ a \leq b\big\}$$

é um semi-anel.

(b) Dados $a, b \in I$ com $a \leq b$, mostre que $]a,b] = \emptyset$ se e somente se $a = b$.

(c) Dados $a, b, a', b' \in I$ com $a < b$, $a' < b'$, mostre que $]a,b] = \,]a',b']$ se e somente se $a = a'$ e $b = b'$.

Definição 5.2. Sejam $(I, <)$, $(I', <)$ conjuntos totalmente ordenados. Uma função $F : I \to I'$ é dita *crescente* (resp., *decrescente*) se $F(a) \leq F(b)$ (resp., $F(a) \geq F(b)$) para todos $a, b \in I$ com $a \leq b$.

Exercício 5.14. Seja $(I, <)$ um conjunto totalmente ordenado não vazio e seja $\mathcal{S}$ o semi-anel definido no enunciado do Exercício 5.13.

(a) Seja $F : I \to \mathbb{R}$ uma função crescente e defina $\mu_F : \mathcal{S} \to [0, +\infty[$ fazendo:

$$\mu_F\big(\,]a,b]\,\big) = F(b) - F(a),$$

para todos $a, b \in I$ com $a \leq b$. Mostre que μ_F é uma medida finitamente aditiva finita em $\mathcal{S}$.

(b) Se $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty[$ é uma medida finitamente aditiva finita em $\mathcal{S}$, mostre que existe uma função crescente $F : I \to \mathbb{R}$ tal que $\mu = \mu_F$.

(c) Dadas funções crescentes $F : I \to \mathbb{R}$, $G : I \to \mathbb{R}$, mostre que $\mu_F = \mu_G$ se e somente se a função $F - G$ é constante.

Exercício 5.15. Seja:

$$\mathcal{S} = \big\{\,]a,b] \cap \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Q},\ a \leq b\big\}$$

e defina $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty[$ fazendo:

$$\mu\big(\,]a,b] \cap \mathbb{Q}\big) = b - a,$$

para todos $a, b \in \mathbb{Q}$ com $a \leq b$. Pelo resultado do Exercício 5.13, $\mathcal{S}$ é um semi-anel e pelo resultado do Exercício 5.14, μ é uma medida finitamente aditiva finita em $\mathcal{S}$ (note que $\mu = \mu_F$, onde $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ é a aplicação inclusão).

(a) Dados $A \in \mathcal{S}$ e $\varepsilon > 0$, mostre que existe uma seqüência $(A_n)_{n\geq 1}$ em $\mathcal{S}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \varepsilon$.
(b) Conclua que μ não é uma medida σ-aditiva.

Exercício 5.16. Seja X um espaço topológico Hausdorff e seja $\mathcal{C}$ uma classe arbitrária de subconjuntos compactos de X. Mostre que $\mathcal{C}$ é uma classe compacta.

Classes Monotônicas e Classes σ-aditivas.

Exercício 5.17.
(a) Se $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ é uma família não vazia de classes monotônicas (resp., de classes σ-aditivas), mostre que $\mathcal{E} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_i$ também é uma classe monotônica (resp., uma classe σ-aditiva).
(b) Mostre que, fixada uma classe de conjuntos $\mathcal{C}$, existe *no máximo uma* classe monotônica (resp., classe σ-aditiva) $\mathcal{E}$ satisfazendo as propriedades (1) e (2) que aparecem na Definição 5.2.3.
(c) Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos arbitrária e seja X um conjunto tal que $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ (por exemplo, tome $X = \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$). Mostre que a interseção de todas as classes monotônicas (resp., classes σ-aditivas) $\mathcal{E} \subset \wp(X)$ que contém $\mathcal{C}$ é uma classe monotônica (resp., classe σ-aditiva) que satisfaz as propriedades (1) e (2) que aparecem na Definição 5.2.3 (note que sempre existe ao menos uma classe monotônica (resp., classe σ-aditiva) $\mathcal{E} \subset \wp(X)$ contendo $\mathcal{C}$, a saber, $\wp(X)$).

Exercício 5.18. Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ um anel (resp., um σ-anel). Mostre que $\mathcal{A}|_X$ é também um anel (resp., um σ-anel).

Exercício 5.19. Seja $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ uma medida σ-finita num semi-anel $\mathcal{S}$. Mostre que para todo $X \in \mathcal{S}$, a medida $\mu|_{\mathcal{S}|_X}$ também é σ-finita.

Exercício 5.20. Seja $\mathcal{C}$ uma classe de conjuntos não vazia. Mostre que a coleção de conjuntos:

$$\Big\{A : \text{existe uma seqüência } (A_k)_{k\geq 1} \text{ em } \mathcal{C} \text{ com } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big\}$$

é um σ-anel que contém $\mathcal{C}$. Conclua que todo elemento do σ-anel gerado por $\mathcal{C}$ está contido numa união enumerável de elementos de $\mathcal{C}$.

Exercício 5.21. Sejam X um conjunto e $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de X. Mostre que X pertence ao σ-anel gerado por $\mathcal{C}$ se e somente se X é igual a uma união enumerável de elementos de $\mathcal{C}$.

Medidas Exteriores e o Teorema da Extensão.

Exercício 5.22. Seja:

$$\mathcal{C} = \{\emptyset\} \cup \big\{\{0, 1, \ldots, n\} : n \in \mathbb{N}\big\}$$

e considere a medida $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ definida por:

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu\big(\{0, 1, \ldots, n\}\big) = \frac{1}{2^n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ (veja Exemplo 5.1.4). Se $\mu^* : \wp(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ é a medida exterior determinada por μ, mostre que $\mu^*(A) = 0$, para todo $A \subset \mathbb{N}$. Conclua que a desigualdade estrita ocorre em (5.3.13), para todo $A \in \mathcal{C}$ não vazio.

Exercício 5.23. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ classes de conjuntos com $\emptyset \in \mathcal{C}$, $\emptyset \in \mathcal{D}$ e sejam $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$, $\nu : \mathcal{D} \to [0, +\infty]$ funções tais que $\mu(\emptyset) = 0$ e $\nu(\emptyset) = 0$. Suponha que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ geram o mesmo σ-anel hereditário $\mathcal{H}$. Sejam $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ e $\nu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ as medidas exteriores determinadas respectivamente pelas funções μ e ν. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) $\mu^* = \nu^*$;
(b) para todo $A \in \mathcal{D}$, temos $\mu^*(A) \le \nu(A)$ e para todo $A \in \mathcal{C}$, temos $\nu^*(A) \le \mu(A)$.

Exercício 5.24. Sejam $\mathcal{S}$ e μ definidos como no Exemplo 5.3.17. Mostre que a medida exterior $\mu^* : \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ determinada por μ coincide com a medida exterior de Lebesgue.

Definição 5.3. Seja $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ uma medida exterior num σ-anel hereditário $\mathcal{H}$. Dado $A \in \mathcal{H}$ então um *envelope mensurável* para A é um conjunto μ^*-mensurável E tal que $A \subset E$ e tal que $\mu^*(E) = \mu^*(A)$. Dizemos que a medida exterior μ^* possui a *propriedade do envelope mensurável* se todo $A \in \mathcal{H}$ admite um envelope mensurável.

Exercício 5.25. Seja $\mathcal{C}$ a classe de conjuntos definida no Exemplo 5.1.4 e seja $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ a medida definida por:

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\mathbb{N}) = 2, \quad \mu\big(\{0, 1, \ldots, n\}\big) = 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\mu^* : \wp(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ a medida exterior determinada por μ. Mostre que:

(a) $\mu^*(A) = 1$, se $A \subset \mathbb{N}$ é finito não vazio e $\mu^*(A) = 2$, se $A \subset \mathbb{N}$ é infinito;
(b) os únicos conjuntos μ^*-mensuráveis são o vazio e $\mathbb{N}$;
(c) μ^* não possui a propriedade do envelope mensurável.

Exercício 5.26. Seja $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ uma medida exterior num σ-anel hereditário $\mathcal{H}$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) existe um semi-anel $\mathcal{S}$ e uma medida $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ tal que $\mathcal{H}$ é o σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{S}$ e μ^* é a medida exterior determinada por μ;
(b) μ^* possui a propriedade do envelope mensurável;
(c) $\mathcal{H}$ é o σ-anel hereditário gerado por $\mathfrak{M}$ e μ^* é a medida exterior determinada pela medida $\mu^*|_{\mathfrak{M}}$, onde $\mathfrak{M}$ denota o σ-anel de conjuntos μ^*-mensuráveis.

Exercício 5.27. Seja $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ uma medida exterior num σ-anel hereditário $\mathcal{H}$; suponha que μ^* possui a propriedade do envelope mensurável. Se $(A_k)_{k\ge 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{H}$ com $A_k \nearrow A$, mostre que $\mu^*(A) = \lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k)$.

DEFINIÇÃO 5.4. Seja $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ uma medida exterior num σ-anel hereditário $\mathcal{H}$. A *medida interior determinada por* μ^* é a aplicação $\mu_* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ definida por:

$$\mu_*(A) = \sup\big\{\mu^*(E) : E \subset A \text{ e } E \text{ é } \mu^*\text{-mensurável}\big\} \in [0, +\infty],$$

para todo $A \in \mathcal{H}$.

EXERCÍCIO 5.28. Seja $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ uma medida exterior num σ-anel hereditário $\mathcal{H}$ e seja $\mu_* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ a medida interior determinada por μ_*. Mostre que:

(a) para todo $A \in \mathcal{H}$ temos $\mu_*(A) \le \mu^*(A)$;
(b) para todo $A \in \mathcal{H}$ existe um conjunto μ^*-mensurável E contido em A tal que $\mu^*(E) = \mu_*(A)$;
(c) $\mu_*(A) = \mu^*(A)$, para todo conjunto μ_*-mensurável A;
(d) dados $A, B \in \mathcal{H}$ com $A \subset B$ então $\mu_*(A) \le \mu_*(B)$;
(e) dada uma seqüência $(A_k)_{k\ge 1}$ de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{H}$ então:
$$\mu_*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \ge \sum_{k=1}^{\infty} \mu_*(A_k);$$
(f) se μ^* possui a propriedade do envelope mensurável e se $A \in \mathcal{H}$ é tal que $\mu_*(A) = \mu^*(A) < +\infty$ então A é μ^*-mensurável.

Completamento de Medidas.

EXERCÍCIO 5.29. Sejam $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma medida num σ-anel $\mathcal{A}$, $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ o completamento de μ e $\mu' : \mathcal{A}' \to [0, +\infty]$ uma medida tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}' \subset \overline{\mathcal{A}}$ e $\mu'|_{\mathcal{A}} = \mu$. Mostre que:

- $\bar{\mu}$ é uma extensão de μ';
- $\bar{\mu}$ é o completamento de μ'.

EXERCÍCIO 5.30. Seja $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma medida num σ-anel $\mathcal{A}$ e seja $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ o completamento de μ. Mostre que μ é σ-finita se e somente se $\bar{\mu}$ é σ-finita.

EXERCÍCIO 5.31. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $(X', \mathcal{A}')$ um espaço mensurável. Suponha que μ é completa. Seja Y um subconjunto mensurável de X com $\mu(X \setminus Y) = 0$ e seja $f : X \to X'$ uma função. Mostre que f é mensurável se e somente se $f|_Y$ é mensurável.

EXERCÍCIO 5.32. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $(X', \mathcal{A}')$ um espaço mensurável. Suponha que μ é completa. Dadas funções $f : X \to X'$, $g : X \to X'$ tais que $f(x) = g(x)$ para quase todo $x \in X$, mostre que f é mensurável se e somente se g é mensurável.

EXERCÍCIO 5.33. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, com μ completa e seja $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função. Se $(f_k)_{k\ge 1}$ é uma seqüência de funções mensuráveis $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e se $f_k \to f$ q. s., mostre que f também é mensurável.

DEFINIÇÃO 5.5. Uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ de partes de um conjunto X é dita *separável* se existe um subconjunto enumerável $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}$ é a σ-álgebra de partes de X gerada por $\mathcal{C}$.

EXERCÍCIO 5.34. Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra separável de partes de um conjunto X e seja Y um subconjunto de X. Mostre que a σ-álgebra $\mathcal{A}|_Y$ também é separável.

EXERCÍCIO 5.35. Seja X um conjunto. Um subconjunto A de X é dito *coenumerável* se o complementar de A em X é enumerável. Seja $\mathcal{A} \subset \wp(X)$ a coleção constituída pelos subconjuntos enumeráveis de X e pelos subconjuntos coenumeráveis de X.

(a) Mostre que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X.
(b) Se X é não enumerável, mostre que $\mathcal{A}$ não é separável.
(c) Dê exemplo de um conjunto X e de σ-álgebras $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ de partes de X com $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, de modo que $\mathcal{B}$ seja separável mas $\mathcal{A}$ não seja.

EXERCÍCIO 5.36. Mostre que a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ e a σ-álgebra de Borel da reta estendida são ambas separáveis.

EXERCÍCIO 5.37. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e seja $(X', \mathcal{A}')$ um espaço mensurável; denote por $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ o completamento da medida μ. Suponha que a σ-álgebra $\mathcal{A}'$ é separável. Dada uma função mensurável $f : (X, \overline{\mathcal{A}}) \to (X', \mathcal{A}')$, mostre que:

(a) existe um conjunto mensurável $Y \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(X \setminus Y) = 0$ e tal que a função $f|_Y : (Y, \mathcal{A}|_Y) \to (X', \mathcal{A}')$ é mensurável;
(b) existe uma função mensurável $g : (X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ que é igual a f quase sempre, i.e., existe $Y \in \mathcal{A}$ tal que $f|_Y = g|_Y$ e tal que $\mu(X \setminus Y) = 0$.

CAPÍTULO 6

Medidas Produto e o Teorema de Fubini

6.1. Produto de σ-Álgebras

Sejam $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ espaços mensuráveis, i.e., X e Y são conjuntos, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X e $\mathcal{B}$ é uma σ-álgebra de partes de Y. Segue do Lema 5.1.14 que a classe de conjuntos:

$$\mathcal{A} \boldsymbol{\times} \mathcal{B} = \big\{A \times B : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\big\} \subset \wp(X \times Y)$$

é um semi-anel; evidentemente, não é de se esperar que $\mathcal{A} \boldsymbol{\times} \mathcal{B}$ seja uma σ-álgebra de partes de $X \times Y$.

6.1.1. Definição. Sejam $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ espaços mensuráveis. A σ-álgebra de partes de $X \times Y$ gerada por $\mathcal{A} \boldsymbol{\times} \mathcal{B}$, denotada por $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, é chamada a *$\sigma$-álgebra produto* de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$. O espaço mensurável $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ é chamado o *produto* de $(X,\mathcal{A})$ por $(Y,\mathcal{B})$.

O seguinte lema dá uma caracterização interessante para a σ-álgebra produto.

6.1.2. Lema. *Sejam $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ espaços mensuráveis e denote por $\pi_1 : X \times Y \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$ as projeções. Então a σ-álgebra produto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é a menor σ-álgebra de partes de $X \times Y$ que torna as aplicações π_1 e π_2 ambas mensuráveis; mais explicitamente:*

- *as projeções:*
$$\pi_1 : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to (X,\mathcal{A}), \quad \pi_2 : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to (Y,\mathcal{B})$$
são mensuráveis;
- *se $\mathcal{P}$ é uma σ-álgebra de partes de $X \times Y$ e se as projeções:*
$$\pi_1 : (X \times Y, \mathcal{P}) \to (X,\mathcal{A}), \quad \pi_2 : (X \times Y, \mathcal{P}) \to (Y,\mathcal{B})$$
são mensuráveis então $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{P}$.

Demonstração. Para todo $A \in \mathcal{A}$, temos:

$$\pi_1^{-1}(A) = A \times Y \in \mathcal{A} \boldsymbol{\times} \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},$$

donde π_1 é mensurável se $X \times Y$ é munido da σ-álgebra produto. Similarmente, π_2 é mensurável se $X \times Y$ é munido da σ-álgebra produto. Seja agora $\mathcal{P}$ uma σ-álgebra de partes de $X \times Y$ que torna as projeções π_1 e π_2 ambas mensuráveis. Daí:

$$\pi_1^{-1}(A) \cap \pi_2^{-1}(B) = A \times B \in \mathcal{P},$$

para todos $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Logo $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ e portanto, como $\mathcal{P}$ é uma σ-álgebra, temos $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{P}$. □

A principal propriedade da σ-álgebra produto é expressa pelo seguinte:

6.1.3. LEMA. *Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$, $(Z, \mathfrak{C})$ espaços mensuráveis e seja $f : Z \to X \times Y$ uma função com funções coordenadas $f_1 : Z \to X$ e $f_2 : Z \to Y$. Se $X \times Y$ é munido da σ-álgebra produto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ então f é mensurável se e somente se f_1 e f_2 são ambas mensuráveis.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\pi_1 : X \times Y \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$ as projeções; temos $f_1 = \pi_1 \circ f$ e $f_2 = \pi_2 \circ f$. Se f é mensurável, então f_1 e f_2 também são mensuráveis, sendo composições de funções mensuráveis. Suponha agora que f_1 e f_2 são mensuráveis e provemos que f é mensurável. Pelo Lema 2.1.5, para estabelecer a mensurabilidade de f é suficiente verificar que:

$$f^{-1}(A \times B) \in \mathfrak{C},$$

para todos $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$; a conclusão segue então da igualdade:

$$f^{-1}(A \times B) = f_1^{-1}(A) \cap f_2^{-1}(B). \qquad \square$$

No Exercício 6.1 pedimos ao leitor para demonstrar que a propriedade constante do enunciado do Lema 6.1.3 caracteriza completamente a σ-álgebra produto.

6.1.4. EXEMPLO. Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis. Se os produtos $X \times Y$ e $Y \times X$ são munidos respectivamente das σ-álgebras $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ então segue do Lema 6.1.3 que a função:

$$\sigma : X \times Y \ni (x, y) \longmapsto (y, x) \in Y \times X$$

é uma bijeção mensurável cuja aplicação inversa σ^{-1} também é mensurável. De fato, as funções coordenadas de σ são as projeções do produto cartesiano $X \times Y$ e as funções coordenadas de σ^{-1} são as projeções do produto cartesiano $Y \times X$. Temos em particular que a bijeção σ induz uma bijeção:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \ni U \longmapsto \sigma(U) \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$$

da σ-álgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sobre a σ-álgebra $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$.

6.1.5. EXEMPLO. Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis. Fixado $x \in X$ então segue do Lema 6.1.3 que a função:

$$i_x : (Y, \mathcal{B}) \ni y \longmapsto (x, y) \in (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

é mensurável; de fato, a primeira coordenada de i_x é uma função constante (veja Exercício 2.1) e a segunda coordenada de i_x é a aplicação identidade. Similarmente, fixado $y \in Y$, vê-se que a aplicação:

$$i^y : (X, \mathcal{A}) \ni x \longmapsto (x, y) \in (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

é mensurável.

6.1.6. EXEMPLO. Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$, $(Z, \mathfrak{C})$ espaços mensuráveis. Seja $f : X \times Y \to Z$ uma função mensurável, onde $X \times Y$ é munido da σ-álgebra produto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Temos que para todo $x \in X$ a função:

$$Y \ni y \longmapsto f(x, y) \in Z \tag{6.1.1}$$

é mensurável e para todo $y \in Y$ a função:

$$X \ni x \longmapsto f(x, y) \in Z \tag{6.1.2}$$

é mensurável. De fato, a função (6.1.1) é igual a $f \circ i_x$ e a função (6.1.2) é igual a $f \circ i^y$ (veja Exemplo 6.1.5).

6.1.7. EXEMPLO. Identificando $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^{m+n}$ (veja (2.8.1)) então o produto da σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^m$ pela σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ coincide com a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^{m+n}$, ou seja:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \tag{6.1.3}$$

De fato, as projeções $\pi_1 : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$, $\pi_2 : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ são contínuas e portanto são Borel mensuráveis, pelo Lema 2.1.15. Mais explicitamente, temos que se $\mathbb{R}^{m+n}$ é munido da σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$ então π_1 e π_2 são ambas mensuráveis; segue então do Lema 6.1.2 que:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}).$$

Para mostrar a inclusão oposta, é suficiente mostrar que todo aberto U de $\mathbb{R}^{m+n}$ pertence à σ-álgebra produto $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Temos que para todo $z \in U$ existem abertos $V_z \subset \mathbb{R}^m$, $W_z \subset \mathbb{R}^n$ tais que $z \in V_z \times W_z \subset U$. Além do mais, a cobertura aberta $U = \bigcup_{z \in U} (V_z \times W_z)$ possui uma subcobertura enumerável, i.e., existe um subconjunto enumerável E de U tal que:

$$U = \bigcup_{z \in E} (V_z \times W_z).$$

Mas $V_z \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $W_z \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $V_z \times W_z \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, para todo $z \in E$; segue então que $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, o que completa a demonstração de (6.1.3).

Vejamos como produtos de σ-álgebras relacionam-se com restrições de σ-álgebras.

6.1.8. LEMA. *Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis e $X_0 \subset X$, $Y_0 \subset Y$ subconjuntos (não necessariamente mensuráveis). Então:*

$$(\mathcal{A}|_{X_0}) \otimes (\mathcal{B}|_{Y_0}) = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})|_{X_0 \times Y_0}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $(\mathcal{A}|_{X_0}) \otimes (\mathcal{B}|_{Y_0})$ é a σ-álgebra de partes de $X_0 \times Y_0$ gerada por $(\mathcal{A}|_{X_0}) \times (\mathcal{B}|_{Y_0})$; evidentemente:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}|_{X_0}) \times (\mathcal{B}|_{Y_0}) &= \big\{(A \cap X_0) \times (B \cap Y_0) : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\big\} \\ &= \big\{(A \times B) \cap (X_0 \times Y_0) : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\big\} \\ &= (\mathcal{A} \times \mathcal{B})|_{X_0 \times Y_0}.\end{aligned}$$

A conclusão segue do resultado do Exercício 2.3. $\square$

6.1.9. EXEMPLO. Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis e $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ conjuntos de geradores para as σ-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ respectivamente. Em geral, não é verdade que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é um conjunto de geradores para a σ-álgebra produto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Por exemplo, se $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \big\{\emptyset, [0,1], [0,1]^{\mathrm{c}}, \mathbb{R}\big\}$ e $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \big\{[0,1]\big\}$ então:

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D} = \big\{[0,1] \times [0,1]\big\}$$

e a σ-álgebra gerada por $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é igual a:

$$\sigma(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \big\{\emptyset, [0,1] \times [0,1], \big([0,1] \times [0,1]\big)^{\mathrm{c}}, \mathbb{R}^2\big\}.$$

No entanto, a σ-álgebra produto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é igual a:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \big\{&\emptyset, [0,1] \times [0,1], [0,1] \times [0,1]^{\mathrm{c}}, [0,1] \times \mathbb{R}, [0,1]^{\mathrm{c}} \times [0,1],\\ &[0,1]^{\mathrm{c}} \times [0,1]^{\mathrm{c}}, [0,1]^{\mathrm{c}} \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times [0,1], \mathbb{R} \times [0,1]^{\mathrm{c}},\\ &\big([0,1] \times [0,1]\big)^{\mathrm{c}}, \big([0,1] \times [0,1]^{\mathrm{c}}\big)^{\mathrm{c}}, \big([0,1]^{\mathrm{c}} \times [0,1]\big)^{\mathrm{c}},\\ &\big(\mathbb{R} \times [0,1]\big) \cup \big([0,1] \times \mathbb{R}\big),\\ &\big([0,1] \times [0,1]\big) \cup \big([0,1]^{\mathrm{c}} \times [0,1]^{\mathrm{c}}\big), \big([0,1]^{\mathrm{c}} \times [0,1]\big) \cup \big([0,1] \times [0,1]^{\mathrm{c}}\big), \mathbb{R}^2\big\}.\end{aligned}$$

Apesar do que vimos no Exemplo 6.1.9, temos o seguinte:

6.1.10. LEMA. *Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis e $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ conjuntos de geradores para as σ-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ respectivamente. Suponha que X é igual a uma união enumerável de elementos de $\mathcal{C}$ e que Y é igual a uma união enumerável de elementos de $\mathcal{D}$ (esse é o caso, por exemplo, se $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$). Então $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é um conjunto de geradores para a σ-álgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\mathcal{P}$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$. Como $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ está contido em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, temos que $\mathcal{P} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Pelo Lema 6.1.2, para provar a inclusão oposta é suficiente verificar que as projeções $\pi_1 : X \times Y \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$ são mensuráveis quando $X \times Y$ é munido da σ-álgebra $\mathcal{P}$. Para todo $A \in \mathcal{C}$, temos:

$$\pi_1^{-1}(A) = A \times Y;$$

por hipótese, existe uma família enumerável $(Y_i)_{i \in I}$ de elementos de $\mathcal{D}$ tal que $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$. Daí $A \times Y_i \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$, para todo $i \in I$ e:

$$\pi_1^{-1}(A) = A \times Y = \bigcup_{i \in I} (A \times Y_i) \in \mathcal{P}.$$

Segue do Lema 2.1.5 que a função π_1 é mensurável quando $X \times Y$ é munido da σ-álgebra $\mathcal{P}$. De modo análogo, verifica-se que π_2 é mensurável quando $X \times Y$ é munido da σ-álgebra $\mathcal{P}$. Isso completa a demonstração. $\square$

6.1.11. COROLÁRIO. *Dados espaços mensuráveis $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ e $(X_3, \mathcal{A}_3)$ então:*

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3).$$

DEMONSTRAÇÃO. Temos que $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ é um conjunto de geradores para $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ que possui o conjunto $X_1 \times X_2$ como elemento; além do mais, $\mathcal{A}_3$ é (trivialmente) um conjunto de geradores para $\mathcal{A}_3$ que possui o conjunto X_3 como elemento. Segue então do Lema 6.1.10 que $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \times \mathcal{A}_3$ é um conjunto de geradores para $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3$. De modo análogo, vê-se que $\mathcal{A}_1 \times (\mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3)$ é um conjunto de geradores para $\mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3)$. Obviamente:

$$(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \times \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \times (\mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3) = \big\{A_1 \times A_2 \times A_3 : A_i \in \mathcal{A}_i,\ i = 1, 2, 3\big\}.$$

A conclusão segue. □

Em vista do Corolário 6.1.11, podemos escrever expressões como:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$$

sem nos preocuparmos com a colocação de parênteses.

6.1.12. COROLÁRIO. *Sejam $(X_1, \mathcal{A}_1)$, ..., $(X_n, \mathcal{A}_n)$ espaços mensuráveis. Então $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ coincide com a σ-álgebra gerada pela classe de conjuntos:*

$$\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n = \big\{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i,\ i = 1, \dots, n\big\}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Segue facilmente do Lema 6.1.10 usando indução. □

6.1.13. NOTAÇÃO. Dados conjuntos X, Y e um subconjunto U de $X \times Y$ então para todo $x \in X$ nós denotamos por $U_x \subset Y$ a *fatia vertical* de U definida por:

$$U_x = \big\{y \in Y : (x, y) \in U\big\} \tag{6.1.4}$$

e para todo $y \in Y$ nós denotamos por $U^y \subset X$ a *fatia horizontal* de U definida por:

$$U^y = \big\{x \in X : (x, y) \in U\big\}.$$

6.1.14. OBSERVAÇÃO. Se as aplicações $i_x : Y \to X \times Y$ e $i^y : X \to X \times Y$ são definidas como no Exemplo 6.1.5 então:

$$U_x = i_x^{-1}(U), \quad U^y = (i^y)^{-1}(U),$$

para todos $x \in X$, $y \in Y$ e todo $U \subset X \times Y$. Se $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ são espaços mensuráveis e $U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, nós concluímos então que $U_x \in \mathcal{A}$ e $U^y \in \mathcal{B}$, para todos $x \in X$, $y \in Y$. Se $\nu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ é uma medida na σ-álgebra $\mathcal{B}$ então para todo $U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ faz sentido considerar a função:

$$X \ni x \longmapsto \nu(U_x) \in [0, +\infty]. \tag{6.1.5}$$

Temos o seguinte:

6.1.15. LEMA. *Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ um espaço de medida. Se $U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e se a medida ν é σ-finita então a função* (6.1.5) *é mensurável.*

DEMONSTRAÇÃO. Assuma primeiramente que a medida ν é finita. Nós vamos mostrar que:

$$\big\{U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : \text{a função (6.1.5) é mensurável}\big\} \tag{6.1.6}$$

é uma classe σ-aditiva que contém $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Como $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é uma classe de conjuntos fechada por interseções finitas (na verdade, pelo Lema 5.1.14, $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é até mesmo um semi-anel), seguirá do lema da classe σ-aditiva (Lema 5.2.5) que (6.1.6) contém $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Isso implicará que a função (6.1.5) é mensurável para todo $U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, sob a hipótese que a medida ν é finita. O fato que (6.1.6) é uma classe σ-aditiva segue diretamente das seguintes observações:

- dados $U, V \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ com $U \cap V = \emptyset$ então $(U \cup V)_x = U_x \cup V_x$, $U_x \cap V_x = \emptyset$ e:
$$\nu\big((U \cup V)_x\big) = \nu(U_x) + \nu(V_x),$$
para todo $x \in X$;
- dados $U, V \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ com $V \subset U$ então $V_x \subset U_x$, $(U \setminus V)_x = U_x \setminus V_x$ e:
$$\nu\big((U \setminus V)_x\big) = \nu(U_x) - \nu(V_x),$$
para todo $x \in X$;
- se $(U^k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ com $U^k \nearrow U$ então $U_x^k \nearrow U_x$ e:
$$\nu(U_x) = \lim_{k \to \infty} \nu(U_x^k),$$
para todo $x \in U$.

Para ver que (6.1.6) contém $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, sejam $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ e $U = A \times B$; temos:

$$\nu(U_x) = \nu(B)\,\chi_A(x),$$

para todo $x \in X$. Logo (6.1.5) é mensurável e $U = A \times B$ está em (6.1.6). Isso completa a demonstração do lema no caso em que a medida ν é finita. Passemos ao caso geral. Como a medida ν é σ-finita, existe uma seqüência $(Y_k)_{k \geq 1}$ em $\mathcal{B}$ tal que $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$ e $\nu(Y_k) < +\infty$, para todo $k \geq 1$; substituindo Y_k por $Y_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} Y_i$ para $k \geq 2$, nós podemos supor que os conjuntos $(Y_k)_{k \geq 1}$ são dois a dois disjuntos (veja Exercício 1.19). Daí, para todo $U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e todo $x \in X$ temos $U_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} (U_x \cap Y_k)$ e:

$$\nu(U_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(U_x \cap Y_k). \tag{6.1.7}$$

Mas $U_x \cap Y_k = \big(U \cap (X \times Y_k)\big)_x$, para todo $x \in X$ e:

$$U \cap (X \times Y_k) \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})|_{X \times Y_k} = \mathcal{A} \otimes (\mathcal{B}|_{Y_k}),$$

onde na última igualdade usamos o Lema 6.1.8. Como a medida $\nu|_{\mathcal{B}|_{Y_k}}$ é finita, a primeira parte da demonstração implica que a função:

$$X \ni x \longmapsto \nu\Big(\big(U \cap (X \times Y_k)\big)_x\Big) = \nu(U_x \cap Y_k) \in [0, +\infty]$$

é mensurável para todo $k \geq 1$; segue então de (6.1.7) que a função (6.1.5) é mensurável. Isso completa a demonstração. □

6.1.16. Observação. Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida, $(Y, \mathcal{B})$ é um espaço mensurável e se a medida μ é σ-finita então evidentemente para todo $U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ temos que a função:

$$Y \ni y \longmapsto \mu(U^y) \in [0, +\infty]$$

é mensurável. Isso pode ser demonstrado fazendo as modificações óbvias na demonstração do Lema 6.1.15 ou aplicando o resultado do Lema 6.1.15 ao conjunto $\sigma(U) \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$, onde σ é definida como no Exemplo 6.1.4.

6.2. Medidas Produto

Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida. Nós definimos uma aplicação $\mu \times \nu : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ fazendo:

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \tag{6.2.1}$$

para todos $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$; recorde da Seção 1.1 que $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$, para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$ (mesmo para $x = \pm\infty$). Observamos que a aplicação $\mu \times \nu$ está de fato bem definida, pois todo elemento não vazio de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ escreve-se de modo único na forma $A \times B$ com $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ e $\mu(A)\nu(B) = 0$, se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

Temos o seguinte:

6.2.1. Lema. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida. A aplicação $\mu \times \nu : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ definida em (6.2.1) é uma medida em $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.*

Demonstração. Evidentemente $(\mu \times \nu)(\emptyset) = 0$. Seja $(E^k)_{k \geq 1}$ uma seqüência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tal que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k$ está em $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Temos que a aplicação (recorde (6.1.4)):

$$X \ni x \longmapsto \nu(E_x) \in [0, +\infty]$$

é mensurável e:

$$\int_X \nu(E_x) \, \mathrm{d}\mu(x) = (\mu \times \nu)(E);$$

de fato, basta observar que se $E = A \times B$ com $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ então

$$\nu(E_x) = \nu(B) \, \chi_A(x),$$

para todo $x \in X$ e:

$$\int_X \nu(E_x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \nu(B) \, \chi_A(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \mu(A)\nu(B) = (\mu \times \nu)(E).$$

Similarmente, para todo $k \geq 1$ a função $x \mapsto \nu(E_x^k)$ é mensurável e sua integral é igual a $(\mu \times \nu)(E^k)$. Como para todo $x \in X$ a fatia vertical E_x é igual à união disjunta das fatias verticais E_x^k, temos:

$$\nu(E_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_x^k).$$

Integrando dos dois lados e usando o resultado do Exercício 2.12 obtemos:

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \nu(E_x^k)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(E^k).$$

Logo $\mu \times \nu$ é uma medida em $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. □

Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ são espaços de medida então $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é um semianel (Lema 5.1.14) e o σ-anel gerado por $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ coincide com a σ-álgebra de partes de $X \times Y$ gerada por $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, já que $X \times Y \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (Exercício 5.8). Segue então do Teorema 5.3.16 que a medida $\mu \times \nu$ em $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ estende-se a uma medida na σ-álgebra produto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Tal extensão não é única em geral. No entanto, se as medidas μ e ν são ambas σ-finitas então a medida $\mu \times \nu$ em $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ também é σ-finita; de fato, se $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$ com $X_k \in \mathcal{A}$, $Y_k \in \mathcal{B}$, $\mu(X_k) < +\infty$ e $\nu(Y_k) < +\infty$ para todo $k \geq 1$ então $X \times Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} (X_k \times Y_l)$ e $(\mu \times \nu)(X_k \times Y_l) < +\infty$, para todos $k, l \geq 1$. Nesse caso, o Teorema 5.3.16 nos diz que $\mu \times \nu$ estende-se *de modo único* a uma medida em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e essa extensão também é σ-finita.

6.2.2. Definição. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida e suponha que μ e ν são σ-finitas. A *medida produto* de μ por ν é definida como sendo a única medida em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ que estende $\mu \times \nu$. A medida produto será também denotada por $\mu \times \nu$ e o espaço de medida $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ é chamado o *produto* de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ por $(Y, \mathcal{B}, \nu)$.

Quando as medidas μ e ν não são σ-finitas, apesar da extensão da medida $\mu \times \nu$ à σ-álgebra produto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ não ser em geral única (veja Exemplo 6.2.3 abaixo), a teoria desenvolvida na Seção 5.3 nos dá uma extensão natural de $\mu \times \nu$ a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (obtida por restrição da medida exterior $(\mu \times \nu)^*$ determinada por $\mu \times \nu$). No entanto, os principais teoremas da teoria das medidas produto não são válidos no caso de medidas não σ-finitas; optamos então por usar a terminologia "medida produto" apenas no caso em que μ e ν são σ-finitas.

6.2.3. Exemplo. Sejam $X = Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{M}(\mathbb{R})$ a σ-álgebra de subconjuntos Lebesgue mensuráveis da reta, $\mathcal{B} = \wp(\mathbb{R})$, $\mu = \mathfrak{m}$ a medida de Lebesgue e $\nu : \wp(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ a medida de contagem (veja Definição 2.2). A medida μ é σ-finita, mas a medida ν não é. Vamos mostrar que a medida $\mu \times \nu$ em $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ possui ao menos duas extensões distintas para a σ-álgebra produto $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Seja $(\mu \times \nu)^* : \wp(\mathbb{R}^2) \to [0, +\infty]$ a medida exterior determinada por $\mu \times \nu$; segue dos Lemas 5.1.14, 6.2.1, 5.3.15 e do Teorema 5.3.16 que a restrição de $(\mu \times \nu)^*$ a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é uma medida que estende $\mu \times \nu$. Seja Δ a diagonal de $\mathbb{R}^2$, isto é:

$$\Delta = \big\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\big\}.$$

Temos $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (veja Exemplo 6.1.7) e obviamente:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}) \otimes \wp(\mathbb{R}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Como Δ é (fechado e portanto) Boreleano em $\mathbb{R}^2$, segue que $\Delta \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Afirmamos que $(\mu \times \nu)^*(\Delta) = +\infty$. De fato, seja $(A_k \times B_k)_{k \geq 1}$ uma seqüência com $A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ e $B_k \in \wp(\mathbb{R})$, para todo $k \geq 1$ e suponha que:

$$\Delta \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \times B_k).$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $k \geq 1$ tal que $(x, x) \in A_k \times B_k$, i.e., tal que $x \in A_k \cap B_k$; logo:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B_k).$$

Afirmamos que existe algum índice $i \geq 1$ tal que $\mathfrak{m}(A_i) > 0$ e tal que o conjunto B_i é infinito. De fato, caso contrário, teríamos que para todo $i \geq 1$, $\mathfrak{m}(A_i) = 0$ ou B_i é finito; mas isso implicaria que $\mathfrak{m}(A_i \cap B_i) = 0$, para todo $i \geq 1$ e portanto $\mathfrak{m}(\mathbb{R}) = 0$, uma contradição. Se $i \geq 1$ é tal que $\mathfrak{m}(A_i) > 0$ e tal que B_i é infinito então $(\mu \times \nu)(A_i \times B_i) = +\infty$ e *a fortiori*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(A_k \times B_k) = +\infty.$$

Isso prova que $(\mu \times \nu)^*(\Delta) = +\infty$. Vamos agora exibir uma outra medida ρ em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ que estende $\mu \times \nu$ e tal que $\rho(\Delta) = 0$. Dado $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ então segue da Observação 6.1.14 que para todo $y \in \mathbb{R}$ a fatia horizontal $E^y \subset \mathbb{R}$ é Lebesgue mensurável e portanto podemos definir:

$$\rho(E) = \sum_{y \in \mathbb{R}} \mathfrak{m}(E^y),$$

para todo $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Se $E = A \times B$ com $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ então:

$$\rho(E) = \sum_{y \in B} \mathfrak{m}(A) = \mu(A)\nu(B) = (\mu \times \nu)(E),$$

donde ρ estende $\mu \times \nu$. Afirmamos que ρ é uma medida; de fato, se $(E_k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e se $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ então, para todo $y \in \mathbb{R}$, $E^y = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^y$ e:

$$\mathfrak{m}(E^y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(E_k^y).$$

Daí:

$$\rho(E) = \sum_{y \in \mathbb{R}} \mathfrak{m}(E^y) = \sum_{y \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(E_k^y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{y \in \mathbb{R}} \mathfrak{m}(E_k^y) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_k).$$

Finalmente, observe que:

$$\rho(\Delta) = \sum_{y \in \mathbb{R}} \mathfrak{m}\big(\{y\}\big) = 0.$$

Daí ρ e $(\mu \times \nu)^*|_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ são duas medidas distintas em $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ que estendem $\mu \times \nu$.

6.2.4. Lema. *Sejam* $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ *espaços de medida e* $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$, $\mathcal{D}\subset\mathcal{B}$ *coleções de conjuntos tais que:*

(a) $\mathcal{C}$ *é um conjunto de geradores para a* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{D}$ *é um conjunto de geradores para a* σ*-álgebra* $\mathcal{B}$*;*
(b) X *é uma união enumerável de elementos de* $\mathcal{C}$ *e* Y *é uma união enumerável de elementos de* $\mathcal{D}$ *(esse é o caso, por exemplo, se* X *está em* $\mathcal{C}$ *e* Y *está em* $\mathcal{D}$*);*
(c) $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$ *são fechadas por interseções finitas;*
(d) $\emptyset\in\mathcal{C}$, $\emptyset\in\mathcal{D}$ *e as medidas* $\mu|_{\mathcal{C}}$ *e* $\nu|_{\mathcal{D}}$ *são* σ*-finitas.*

Se $\rho:\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to[0,+\infty]$ *é uma medida em* $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ *tal que* $\rho(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$, *para todos* $A\in\mathcal{C}$, $B\in\mathcal{D}$ *então* ρ *é igual à medida produto* $\mu\times\nu$.

6.2.5. Observação. As hipóteses (a) e (b) no Lema 6.2.4 são equivalentes à condição de que $\mathcal{A}$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ é o σ-anel gerado por $\mathcal{D}$ (veja Exercícios 5.8 e 5.21). Em vista disso, a hipótese (d) implica que as medidas μ e ν são σ-finitas, de modo que está bem definida a medida produto $\mu\times\nu$ (veja Observação 5.2.9). Sobre a hipótese $\emptyset\in\mathcal{C}$, $\emptyset\in\mathcal{D}$, veja a nota de rodapé na página 167.

Demonstração do Lema 6.2.4. Vamos aplicar o Lema 5.2.12 às medidas $\mu\times\nu$ e ρ. Como X é uma união enumerável de elementos de $\mathcal{C}$ e cada elemento de $\mathcal{C}$ está contido numa união enumerável de elementos de $\mathcal{C}$ de medida finita, podemos escrever $X=\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k$, com $X_k\in\mathcal{C}$ e $\mu(X_k)<+\infty$, para todo $k\ge1$; similarmente, escrevemos $Y=\bigcup_{k=1}^{\infty}Y_k$, com $Y_k\in\mathcal{D}$ e $\nu(Y_k)<+\infty$, para todo $k\ge1$. Temos que todo elemento de $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ está contido em $X\times Y$ e:

$$X\times Y=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=1}^{\infty}(X_k\times Y_l), \tag{6.2.2}$$

com $(\mu\times\nu)(X_k\times Y_l)=\mu(X_k)\nu(Y_l)<+\infty$, para todos $k,l\ge1$; isso prova que a medida $(\mu\times\nu)|_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}$ é σ-finita. A igualdade (6.2.2) mostra também que o σ-anel gerado por $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ coincide com a σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ (veja Exercício 5.8); mas, pelo Lema 6.1.10, a σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ é $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Como a classe de conjuntos $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ é fechada por interseções finitas, o Lema 5.2.12 implica que $\mu\times\nu=\rho$. □

6.2.6. Corolário. *Dados espaços de medida* $(X_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$, $(X_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ *e* $(X_3,\mathcal{A}_3,\mu_3)$ *com* μ_1, μ_2 *e* μ_3 σ*-finitas então:*

$$(\mu_1\times\mu_2)\times\mu_3=\mu_1\times(\mu_2\times\mu_3).$$

Demonstração. Aplique o Lema 6.2.4 com $X=X_1\times X_2$, $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$, $\mu=\mu_1\times\mu_2$, $\mathcal{C}=\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$, $Y=X_3$, $\mathcal{B}=\mathcal{A}_3$, $\nu=\mu_3$, $\mathcal{D}=\mathcal{A}_3$ e

$$\rho=\mu_1\times(\mu_2\times\mu_3),$$

notando que $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3)$ (Corolário 6.1.11) e que:

$$\begin{aligned}\rho\big((A_1 \times A_2) \times A_3\big) = \rho\big(A_1 \times (A_2 \times A_3)\big) &= \mu_1(A_1)\,(\mu_2 \times \mu_3)(A_2 \times A_3)\\ = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\mu_3(A_3) &= (\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2)\,\mu_3(A_3)\\ &= \big((\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3\big)\big((A_1 \times A_2) \times A_3\big),\end{aligned}$$

para todos $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$, $A_3 \in \mathcal{A}_3$. □

Em vista do Corolário 6.2.6, podemos escrever expressões como:

$$\mu_1 \times \cdots \times \mu_n$$

sem nos preocupar com a colocação de parênteses. No Exercício 6.5 nós pedimos ao leitor para demonstrar uma versão do Lema 6.2.4 para o caso de um produto de um número finito arbitrário de medidas.

6.2.7. Observação. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida com μ e ν σ-finitas e sejam $X_0 \in \mathcal{A}$, $Y_0 \in \mathcal{B}$. As medidas $\mu|_{\mathcal{A}|_{X_0}}$ e $\nu|_{\mathcal{B}|_{Y_0}}$ também são σ-finitas (veja Exercício 5.19) e a medida produto $(\mu|_{\mathcal{A}|_{X_0}}) \times (\nu|_{\mathcal{B}|_{Y_0}})$ coincide com a restrição a $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})|_{X_0 \times Y_0}$ de $\mu \times \nu$. De fato, o Lema 6.1.8 nos diz que:

$$(\mathcal{A}|_{X_0}) \otimes (\mathcal{B}|_{Y_0}) = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})|_{X_0 \times Y_0}$$

e obviamente a restrição de $\mu \times \nu$ a $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})|_{X_0 \times Y_0}$ é uma medida que avaliada em $A \times B$ dá $\mu(A)\nu(B)$, para todo $A \in \mathcal{A}|_{X_0}$ e todo $B \in \mathcal{B}|_{Y_0}$.

6.2.8. Exemplo. Se μ denota a restrição à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ da medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^m$ e ν denota a restrição à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ da medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ então $\mu \times \nu$ é igual à restrição à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$ da medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^{m+n}$. De fato, vimos no Exemplo 6.1.7 que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; o fato que $\mu \times \nu$ é exatamente a restrição da medida de Lebesgue segue do Lema 6.2.4, tomando $X = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $Y = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{C}$ como sendo a classe dos blocos retangulares m-dimensionais, $\mathcal{D}$ como sendo a classe dos blocos retangulares n-dimensionais e ρ como sendo a restrição a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$ da medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^{m+n}$ (tenha em mente que, pelo Lema 1.4.23, a σ-álgebra de Borel é gerada pelos blocos retangulares).

Em vista do Exemplo 6.2.8 e do resultado do Exercício 1.17, vemos que poderíamos definir a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ como sendo o completamento do produto de n cópias da restrição a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ da medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$. Podemos então definir a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ sem usar a teoria desenvolvida no Capítulo 1.

Uma pergunta natural agora seria: que resultado obtemos se fizermos o produto da medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^m$ pela medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ (sem tomar restrições às σ-álgebras de Borel)? A resposta é que nesse caso obtemos a restrição da medida de Lebesgue a uma σ-álgebra intermediária entre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$ e $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{m+n})$ (veja Lema 6.4.1).

Vejamos agora como a medida produto $\mu \times \nu$ pode ser escrita usando uma integral.

6.2.9. Proposição. *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *espaços de medida, com* μ *e* ν σ*-finitas. Dado* $U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *então:*

$$(\mu \times \nu)(U) = \int_X \nu(U_x)\,\mathrm{d}\mu(x). \tag{6.2.3}$$

Demonstração. Recorde do Lema 6.1.15 que para todo $U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a função $X \ni x \mapsto \nu(U_x) \in [0, +\infty]$ é mensurável, de modo que a integral em (6.2.3) está bem definida. Defina uma aplicação $\rho : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ fazendo:

$$\rho(U) = \int_X \nu(U_x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

para todo $U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. A demonstração da proposição estará completa se verificarmos que ρ é uma medida e que ρ coincide com $\mu \times \nu$ em $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. A demonstração de que ρ coincide com $\mu \times \nu$ em $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ foi feita durante a prova do Lema 6.2.1. Vamos então provar que ρ é uma medida. Seja $(U^k)_{k \geq 1}$ uma seqüência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ e seja $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k$. Para cada $x \in X$, temos que a fatia vertical U_x é igual à união disjunta das fatias verticais U_x^k, $k \geq 1$, e portanto:

$$\nu(U_x) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(U_x^k),$$

para todo $x \in X$. Integrando dos dois lados e usando o resultado do Exercício 2.12 obtemos:

$$\rho(E) = \int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \nu(E_x^k)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E^k).$$

Isso prova que ρ é uma medida e completa a demonstração. $\square$

6.2.10. Observação. A tese da Proposição 6.2.9 poderia ser substituída por:

$$(\mu \times \nu)(U) = \int_Y \mu(U^y)\,\mathrm{d}\nu(y),$$

para todo $U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Isso pode ser demonstrado fazendo as modificações óbvias na demonstração da Proposição 6.2.9 ou aplicando o resultado dessa proposição ao conjunto $\sigma(U) \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$, onde σ é definida como no Exemplo 6.1.4 (veja também o resultado do Exercício 6.6).

Em particular, se μ e ν são σ-finitas, então para todo $U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, temos:

$$\int_X \nu(U_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(U^y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

6.3. O Teorema de Fubini

6.3.1. Teorema (Fubini–Tonelli). *Sejam* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *espaços de medida, com* μ *e* ν σ*-finitas. Seja* $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *uma função mensurável, onde* $X \times Y$ *é munido da* σ*-álgebra produto* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*. Se* f *é quase integrável então:*

(a) *para todo* $x \in X$, *a função* $Y \ni y \mapsto f(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}$ *é mensurável;*
(b) *o conjunto:*

$$X_0 = \big\{x \in X : \textit{a função } Y \ni y \mapsto f(x,y) \in \overline{\mathbb{R}} \textit{ é quase integrável}\big\}$$

é mensurável e $\mu(X \setminus X_0) = 0$*;*
(c) *a função* $X_0 \ni x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \in \overline{\mathbb{R}}$ *é quase integrável;*
(d) *vale a igualdade:*

$$\int_{X_0} \Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,y).$$

Observe que se a função f é não negativa então $X_0 = X$ e a afirmação que aparece no item (b) é trivial.

Demonstração. A validade do item (a) segue diretamente do Exemplo 6.1.6. Dividimos o restante da demonstração em itens.

- *O teorema vale se f é simples, mensurável e não negativa.*
  Podemos escrever $f = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A^i}$, com $c_i \in [0,+\infty]$ e A^i um subconjunto mensurável de $X\times Y$, para $i = 1,\ldots,k$. Note que, se $x \in X$, temos:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{A^i_x}(y), \tag{6.3.1}$$

  para todo $y \in Y$. Logo, usando a Proposição 6.2.9, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_X \Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_X \sum_{i=1}^k c_i\nu(A^i_x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \sum_{i=1}^k c_i \int_X \nu(A^i_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i=1}^k c_i\,(\mu\times\nu)(A^i)\\ &= \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,y).\end{aligned}$$

- *O teorema vale se f é mensurável e não negativa.*
  Seja $(f_k)_{k\ge1}$ uma seqüências de funções $f_k : X\times Y \to [0,+\infty]$ simples e mensuráveis com $f_k \nearrow f$. Pelo Teorema da Convergência Monotônica, temos:

$$\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \lim_{k\to\infty}\int_Y f_k(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y),$$

para todo $x \in X$. Logo a função $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ é mensurável e, usando novamente o Teorema da Convergência Monotônica, obtemos:

$$\int_X \Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_X \Big(\int_Y f_k(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{X\times Y} f_k(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,y) = \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,y).$$

- *O teorema vale se f é quase integrável.*

Como f^+ e f^- são funções mensuráveis não negativas, temos:

$$\int_X \Big(\int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{X\times Y} f^+(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,y), \tag{6.3.2}$$
$$\int_X \Big(\int_Y f^-(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{X\times Y} f^-(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,y). \tag{6.3.3}$$

O conjunto X_0 é igual ao conjunto dos pontos de X onde ao menos uma das funções:

$$X \ni x \longmapsto \int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y), \quad X \ni x \longmapsto \int_Y f^-(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y),$$

é finita; como essas funções são ambas mensuráveis, segue que o conjunto X_0 é mensurável. Como f é quase integrável, temos que f^+ é integrável ou f^- é integrável; para fixar as idéias, vamos supor que:

$$\int_{X\times Y} f^-\,\mathrm{d}(\mu\times\nu) < +\infty.$$

Tendo em mente o resultado do Exercício 2.19, segue de (6.3.3) que:

$$\int_Y f^-(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) < +\infty, \tag{6.3.4}$$

para quase todo $x \in X$. Como o conjunto X_0 contém os pontos $x \in X$ tais que (6.3.4) vale, concluímos que $\mu(X\setminus X_0) = 0$. Além do mais, de (6.3.2) e (6.3.3) vem:

$$\int_{X_0} \Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x) =$$
$$\int_{X_0} \Big(\int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_{X_0} \Big(\int_Y f^-(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \int_X \Big(\int_Y f^+(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x) - \int_X \Big(\int_Y f^-(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \int_{X\times Y} f^+(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,y) - \int_{X\times Y} f^-(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,y)$$
$$= \int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\times\nu)(x,y),$$

onde usamos também o Corolário 2.4.11. $\square$

6.4. O Completamento da Medida Produto

6.4.1. Lema. *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida, com μ e ν σ-finitas. Denote por $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$, $\bar{\nu} : \overline{\mathcal{B}} \to [0, +\infty]$, respectivamente os completamentos de μ e de ν. Então $\bar{\mu} \times \bar{\nu}$ é uma extensão de $\mu \times \nu$ e o completamento $\overline{\mu \times \nu}$ de $\mu \times \nu$ é uma extensão de $\bar{\mu} \times \bar{\nu}$.*

Note que, pelo resultado do Exercício 5.30, o completamento de uma medida σ-finita ainda é σ-finita, de modo que faz sentido considerar a medida produto $\bar{\mu} \times \bar{\nu}$.

Demonstração. Segue do resultado do Exercício 6.7 que $\bar{\mu} \times \bar{\nu}$ é uma extensão de $\mu \times \nu$. Denote por $\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ o domínio de $\overline{\mu \times \nu}$. Para mostrar que $\overline{\mu \times \nu}$ é uma extensão de $\bar{\mu} \times \bar{\nu}$, é suficiente mostrar que:

$$\overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$$

e que:

$$\overline{\mu \times \nu}\,(E \times F) = \bar{\mu}(E)\bar{\nu}(F),$$

para todos $E \in \overline{\mathcal{A}}$, $F \in \overline{\mathcal{B}}$. Dados $E \in \overline{\mathcal{A}}$, $F \in \overline{\mathcal{B}}$, podemos escrever $E = A \cup N$, $F = B \cup N'$ com $N \subset M$, $N' \subset M'$, $A, M \in \mathcal{A}$, $B, M' \in \mathcal{B}$, $\mu(M) = 0$ e $\nu(M') = 0$. Temos:

$$E \times F = (A \times B) \cup \big((A \times N') \cup (N \times B) \cup (N \times N')\big),$$

com:

$$(A \times N') \cup (N \times B) \cup (N \times N') \subset (A \times M') \cup (M \times B) \cup (M \times M'),$$

e:

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)\big((A \times M') \cup (M \times B) \cup (M \times M')\big) \le \mu(A)\nu(M') + \mu(M)\nu(B) \\ + \mu(M)\nu(M') = 0.\end{aligned}$$

Isso mostra que $E \times F \in \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ e que:

$$\overline{\mu \times \nu}\,(E \times F) = (\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) = \bar{\mu}(E)\bar{\nu}(F). \qquad \square$$

6.4.2. Corolário. *Nas condições do Lema 6.4.1, temos que $\overline{\mu \times \nu}$ é o completamento da medida $\bar{\mu} \times \bar{\nu}$.*

Demonstração. Segue diretamente do Lema 6.4.1 e do resultado do Exercício 5.29. $\square$

6.4.3. Teorema (Fubini–Tonelli). *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida, com μ e ν σ-finitas e completas. Seja $\overline{\mu \times \nu} : \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} \to [0, +\infty]$ o completamento da medida produto $\mu \times \nu$. Se $f : (X \times Y, \overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}) \to \overline{\mathbb{R}}$ é uma função mensurável, então os itens (b), (c) e (d) da tese do Teorema 6.3.1 valem.*

Demonstração. Segue dos resultados dos Exercícios 5.36 e 5.37 que existem uma função mensurável $g : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}$ e um conjunto $U \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ de modo que $f(x, y) = g(x, y)$ para todo $(x, y) \in (X \times Y) \setminus U$ e $(\mu \times \nu)(U) = 0$. Pela Proposição 6.2.9, temos:

$$\int_X \nu(U_x) \, \mathrm{d}\mu(x) = (\mu \times \nu)(U) = 0,$$

e portanto (veja Exercício 2.21) $\nu(U_x) = 0$, para quase todo $x \in X$. Seja $N \in \mathcal{A}$ um conjunto tal que $\mu(N) = 0$ e tal que $\nu(U_x) = 0$, para todo $x \in X \setminus N$. Dado $x \in X$, temos que $f(x, y) = g(x, y)$ para todo $y \in Y \setminus U_x$ e portanto, se $x \in X \setminus N$, temos $f(x, y) = g(x, y)$ para quase todo $y \in Y$. Sejam:

$$X_0 = \big\{x \in X : \text{a função } Y \ni y \mapsto f(x, y) \in \overline{\mathbb{R}} \text{ é quase integrável}\big\},$$
$$X_1 = \big\{x \in X : \text{a função } Y \ni y \mapsto g(x, y) \in \overline{\mathbb{R}} \text{ é quase integrável}\big\};$$

se $x \in X \setminus N$ temos que $x \in X_0$ se e somente se $x \in X_1$ (veja Exercício 5.32 e Corolário 2.4.13)) e:

$$\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) = \int_Y g(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y), \tag{6.4.1}$$

para todo $x \in (X_0 \cap X_1) \setminus N$. Aplicando o Teorema 6.3.1 para a função g, vemos que o conjunto X_1 é mensurável, $\mu(X \setminus X_1) = 0$ e:

$$\int_{X_1} \Big(\int_Y g(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \Big) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{X \times Y} g(x, y) \, \mathrm{d}(\mu \times \nu)(x, y). \tag{6.4.2}$$

Temos $X \setminus X_0 \subset (X \setminus X_1) \cup N$ e $\mu\big((X \setminus X_1) \cup N\big) = 0$; portanto, como μ é completa, $X \setminus X_0$ e X_0 são mensuráveis e $\mu(X \setminus X_0) = 0$. Seja:

$$R = (X_0 \cap X_1) \setminus N;$$

temos $X \setminus R \subset (X \setminus X_0) \cup (X \setminus X_1) \cup N$, donde $\mu(R) = 0$. Daí (veja Corolário 2.4.11):

$$\begin{aligned} \int_{X_1} \Big(\int_Y g(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \Big) \, \mathrm{d}\mu(x) &= \int_R \Big(\int_Y g(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \Big) \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &\overset{(6.4.1)}{=} \int_R \Big(\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \Big) \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{X_0} \Big(\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \Big) \, \mathrm{d}\mu(x). \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

A conclusão segue de (6.4.2) e (6.4.3), observando que:

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} g(x, y) \, \mathrm{d}(\mu \times \nu)(x, y) &= \int_{X \times Y} g(x, y) \, \mathrm{d}(\overline{\mu \times \nu})(x, y) \\ &= \int_{X \times Y} f(x, y) \, \mathrm{d}(\overline{\mu \times \nu})(x, y), \end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usamos o resultado do Exercício 2.17 e na segunda usamos o Corolário 2.4.13. □

Exercícios para o Capítulo 6

Produto de σ-Álgebras.

EXERCÍCIO 6.1. Sejam $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ espaços mensuráveis e seja $\mathcal{P}$ uma σ-álgebra de partes de $X\times Y$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) $\mathcal{P}=\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$;
(b) para todo espaço mensurável $(Z,\mathfrak{C})$ e toda função $f:Z\to X\times Y$ com funções coordenadas $f_1:Z\to X$, $f_2:Z\to Y$, temos que $f:Z\to(X\times Y,\mathcal{P})$ é mensurável se e somente se f_1 e f_2 são ambas mensuráveis.

EXERCÍCIO 6.2. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ classes de conjuntos e $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ respectivamente os σ-anéis gerados por $\mathcal{C}$ e por $\mathcal{D}$. Seja $\mathcal{P}$ o σ-anel gerado por $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$.

(a) Dados conjuntos A_0 e B_0, mostre que as classes de conjuntos:
$$\big\{A\in\mathcal{A}:A\times B_0\in\mathcal{P}\big\},$$
$$\big\{B\in\mathcal{B}:A_0\times B\in\mathcal{P}\big\},$$
são σ-anéis.
(b) Mostre que $A\times B_0\in\mathcal{P}$, para todos $A\in\mathcal{A}$, $B_0\in\mathcal{D}$.
(c) Mostre que $A\times B\in\mathcal{P}$, para todos $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$.
(d) Conclua que o σ-anel gerado por $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ é igual ao σ-anel gerado por $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$.

EXERCÍCIO 6.3. Sejam $(X_1,\mathcal{A}_1)$, $\ldots$, $(X_n,\mathcal{A}_n)$ espaços mensuráveis. Mostre que $\mathcal{A}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{A}_n$ é a menor σ-álgebra de partes de $X_1\times\cdots\times X_n$ que torna todas as projeções $\pi_i:X_1\times\cdots\times X_n\to X_i$, $i=1,\ldots,n$, mensuráveis.

EXERCÍCIO 6.4. Sejam $(X_1,\mathcal{A}_1)$, $\ldots$, $(X_n,\mathcal{A}_n)$, $(Y,\mathcal{B})$ espaços mensuráveis e $f:Y\to X_1\times\cdots\times X_n$ uma função com funções coordenadas $f_i:Y\to X_i$, $i=1,\ldots,n$. Se $X_1\times\cdots\times X_n$ é munido da σ-álgebra produto $\mathcal{A}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{A}_n$, mostre que f é mensurável se e somente se todas as funções coordenadas f_i, $i=1,\ldots,n$, são mensuráveis.

Medidas Produto.

EXERCÍCIO 6.5. Sejam $(X_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$, $\ldots$, $(X_n,\mathcal{A}_n,\mu_n)$ espaços de medidas, com μ_1, $\ldots$, μ_n σ-finitas. Para cada $i=1,\ldots,n$, seja $\mathcal{C}_i\subset\mathcal{A}_i$ uma coleção de conjuntos tal que:

- $\mathcal{C}_i$ é um conjunto de geradores para a σ-álgebra $\mathcal{A}_i$;
- X_i é uma união enumerável de elementos de $\mathcal{C}_i$ (esse é o caso, por exemplo, se $X_i\in\mathcal{C}_i$);
- $\mathcal{C}_i$ é fechado por interseções finitas;
- $\emptyset\in\mathcal{C}_i$ e a medida $\mu_i|_{\mathcal{C}_i}$ é σ-finita.

Se $\rho:\mathcal{A}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{A}_n\to[0,+\infty]$ é uma medida tal que
$$\rho(A_1\times\cdots\times A_n)=\mu_1(A_1)\cdots\mu_n(A_n),$$
para todos $A_1\in\mathcal{C}_1$, $\ldots$, $A_n\in\mathcal{C}_n$, mostre que ρ é igual à medida produto $\mu_1\times\cdots\times\mu_n$.

EXERCÍCIO 6.6. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida, com μ e ν σ-finitas. Denote por $\sigma : X \times Y \to Y \times X$ a aplicação definida no Exemplo 6.1.4. Se $X \times Y$ e $Y \times X$ são munidos respectivamente das medidas produto $\mu \times \nu$ e $\nu \times \mu$, mostre que a aplicação σ preserva medida (veja Definição 2.1).

EXERCÍCIO 6.7. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espaços de medida e sejam $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ σ-álgebras. Assuma que as medidas μ, ν, $\mu|_{\mathcal{A}_0}$ e $\nu|_{\mathcal{B}_0}$ sejam todas σ-finitas. Mostre que a medida produto $\mu \times \nu$ é uma extensão da medida $(\mu|_{\mathcal{A}_0}) \times (\nu|_{\mathcal{B}_0})$.

CAPÍTULO 7

Conjuntos Analíticos e o Teorema de Choquet

7.1. Espaços Poloneses e seus Boreleanos

Dado um conjunto X, denotamos por Δ_X a diagonal do produto cartesiano $X \times X$, isto é:

$$\Delta_X = \big\{(x, x) : x \in X\big\}.$$

7.1.1. Lema. *Para todo subconjunto S de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ o conjunto Δ_S pertence à σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \otimes \wp(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$; mais precisamente, Δ_S é uma interseção enumerável de uniões enumeráveis de elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \times \wp(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$.*

Demonstração. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, seja:

$$A_{nm} = \big\{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : m = \alpha(n)\big\};$$

temos que A_{nm} é fechado em $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, sendo a imagem inversa do ponto m pela função contínua $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \ni \alpha \mapsto \alpha(n) \in \mathbb{N}$. Em particular, temos $A_{nm} \in \mathcal{B}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$. Seja também:

$$B_{nm} = A_{nm} \cap S \in \wp(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}),$$

para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Afirmamos que o conjunto Δ_S é igual a:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (A_{nm} \times B_{nm}). \tag{7.1.1}$$

De fato, dado $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ então (α, β) pertence a (7.1.1) se e somente se para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m = \alpha(n)$, $m = \beta(n)$ e $\beta \in S$; mas temos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m = \alpha(n)$, $m = \beta(n)$ e $\beta \in S$ se e somente se $\alpha(n) = \beta(n)$ e $\beta \in S$. Concluímos então que (α, β) está em (7.1.1) se e somente se $\beta \in S$ e $\alpha(n) = \beta(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, se e somente se $\alpha = \beta$ e $\beta \in S$. Logo (7.1.1) é igual a Δ_S. $\square$

APÊNDICE A

Soluções para os Exercícios Propostos

A.1. Exercícios do Capítulo 1

Exercício 1.9. Pelo Lema 1.4.4, temos $\mathfrak{m}^*(A) \le \mathfrak{m}^*(U) = \mathfrak{m}(U)$, para todo aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo A. Logo $\mathfrak{m}^*(A)$ é uma conta inferior do conjunto $\big\{\mathfrak{m}(U) : U \supset A \text{ aberto}\big\}$. Para ver que $\mathfrak{m}^*(A)$ é a maior cota inferior desse conjunto, devemos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $U \supset A$ aberto com $\mathfrak{m}(U) \le \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon$. Mas esse é precisamente o resultado do Lema 1.4.12.

Exercício 1.10. Como A é mensurável então, para todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto $U \supset A$ com $\mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon$. Daí $U + x$ é um aberto em $\mathbb{R}^n$ contendo $A + x$ e $(U + x) \setminus (A + x) = (U \setminus A) + x$. Logo, pelo Lema 1.4.10, temos $\mathfrak{m}^*\big((U + x) \setminus (A + x)\big) = \mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon$.

Exercício 1.11.

(a) O resultado é claro se B é vazio. Senão, $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ e

$$\widehat{\sigma}(B) = \prod_{i=1}^n [a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)}]$$

também é um bloco retangular n-dimensional e:

$$|\widehat{\sigma}(B)| = \prod_{i=1}^n (b_{\sigma(i)} - a_{\sigma(i)}) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = |B|.$$

(b) Se $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ é uma cobertura de A por blocos ratangulares n-dimensionais então $\widehat{\sigma}(A) \subset \bigcup_{k=1}^\infty \widehat{\sigma}(B_k)$ é uma cobertura de $\widehat{\sigma}(A)$ por blocos retangulares n-dimensionais e

$$\sum_{k=1}^\infty |\widehat{\sigma}(B_k)| = \sum_{k=1}^\infty |B_k|.$$

Isso mostra que $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}\big(\widehat{\sigma}(A)\big)$ (recorde (1.4.1)). Por outro lado, se $\tau = \sigma^{-1}$ então $A = \widehat{\tau}\big(\widehat{\sigma}(A)\big)$ e daí o mesmo argumento mostra que $\mathcal{C}\big(\widehat{\sigma}(A)\big) \subset \mathcal{C}(A)$; logo:

$$\mathfrak{m}^*(A) = \inf \mathcal{C}(A) = \inf \mathcal{C}\big(\widehat{\sigma}(A)\big) = \mathfrak{m}^*\big(\widehat{\sigma}(A)\big).$$

(c) Se A é mensurável então para todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon$. Daí $\widehat{\sigma}(U)$ é um aberto contendo $\widehat{\sigma}(A)$ e:

$$\mathfrak{m}^*\big(\widehat{\sigma}(U) \setminus \widehat{\sigma}(A)\big) = \mathfrak{m}^*\big(\widehat{\sigma}(U \setminus A)\big) = \mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon,$$

provando que $\widehat{\sigma}(A)$ é mensurável.

Exercício 1.12.

(a) O resultado é claro se B é vazio. Senão, $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ e

$$D_\lambda(B) = \prod_{i=1}^n [a_i', b_i'],$$

onde $a_i' = \lambda_i a_i$, $b_i' = \lambda_i b_i$ se $\lambda_i > 0$ e $a_i' = \lambda_i b_i$, $b_i' = \lambda_i a_i$ se $\lambda_i < 0$; em todo caso:

$$|D_\lambda(B)| = \prod_{i=1}^n (b_i' - a_i') = \prod_{i=1}^n |\lambda_i|(b_i - a_i) = |\det D_\lambda|\,|B|.$$

(b) Se $A \subset \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ é uma cobertura de A por blocos retangulares n-dimensionais então $D_\lambda(A) \subset \bigcup_{k=1}^\infty D_\lambda(B_k)$ é uma cobertura de $D_\lambda(A)$ por blocos retangulares n-dimensionais e

$$\sum_{k=1}^\infty |D_\lambda(B_k)| = |\det D_\lambda| \sum_{k=1}^\infty |B_k|.$$

Isso mostra que (recorde (1.4.1)):

$$|\det D_\lambda|\,\mathcal{C}(A) = \big\{|\det D_\lambda|\,a : a \in \mathcal{C}(A)\big\} \subset \mathcal{C}\big(D_\lambda(A)\big). \tag{A.1.1}$$

Por outro lado, se $\mu = \big(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\big)$ então $A = D_\mu\big(D_\lambda(A)\big)$ e daí o mesmo argumento mostra que:

$$|\det D_\mu|\,\mathcal{C}\big(D_\lambda(A)\big) \subset \mathcal{C}(A). \tag{A.1.2}$$

Como $|\det D_\mu| = |\det D_\lambda|^{-1}$, de (A.1.1) e (A.1.2) vem:

$$\mathcal{C}\big(D_\lambda(A)\big) = |\det D_\lambda|\,\mathcal{C}(A).$$

Concluímos então que:

$$\mathfrak{m}^*\big(D_\lambda(A)\big) = \inf \mathcal{C}\big(D_\lambda(A)\big) = |\det D_\lambda| \inf \mathcal{C}(A) = |\det D_\lambda|\,\mathfrak{m}^*(A).$$

(c) Se A é mensurável então para todo $\varepsilon > 0$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo A tal que $\mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon\,|\det D_\lambda|^{-1}$. Daí $D_\lambda(U)$ é um aberto que contém $D_\lambda(A)$ e:

$$\mathfrak{m}^*\big(D_\lambda(U) \setminus D_\lambda(A)\big) = \mathfrak{m}^*\big(D_\lambda(U \setminus A)\big) = |\det D_\lambda|\,\mathfrak{m}^*(U \setminus A) < \varepsilon,$$

provando que $D_\lambda(A)$ é mensurável.

Exercício 1.13. Temos $B \subset A \cup (B \setminus A) \subset A \cup (A \triangle B)$ e portanto $\mathfrak{m}^*(B) \leq \mathfrak{m}^*(A) + \mathfrak{m}^*(A \triangle B) = \mathfrak{m}^*(A)$. De modo análogo mostra-se que $\mathfrak{m}^*(A) \leq \mathfrak{m}^*(B)$ e portanto $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}^*(B)$. Suponha agora que A é mensurável. Então:

$$B = \big(A \setminus (A \setminus B)\big) \cup (B \setminus A). \tag{A.1.3}$$

Como $A \setminus B \subset A \triangle B$ e $B \setminus A \subset A \triangle B$ então $\mathfrak{m}^*(A \setminus B) = 0$ e $\mathfrak{m}^*(B \setminus A) = 0$. Segue do Lema 1.4.16 que $A \setminus B$ e $B \setminus A$ são ambos mensuráveis; logo (A.1.3) implica que B é mensurável. Da mesma forma mostra-se que a mensurabilidade de B implica na mensurabilidade de A.

Exercício 1.14. Seja $U \supset A$ um aberto tal que $\mathfrak{m}(U \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pelo Lema 1.4.23 podemos escrever $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, onde $(B_k)_{k \geq 1}$ é uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos; pelo Corolário 1.4.21 temos:

$$\mathfrak{m}(U) = \sum_{k=1}^{\infty} |B_k|.$$

Note que $\mathfrak{m}(U) = \mathfrak{m}(U \setminus A) + \mathfrak{m}(A) < +\infty$ e portanto a série $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$ é convergente; existe portanto $t \geq 1$ tal que $\sum_{k>t} |B_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Observe agora que:

$$\Big(\bigcup_{k=1}^{t} B_k\Big) \triangle A \subset (U \setminus A) \cup \Big(\bigcup_{k>t} B_k\Big)$$

e portanto:

$$\mathfrak{m}\Big(\big(\textstyle\bigcup_{k=1}^{t} B_k\big) \triangle A\Big) \leq \mathfrak{m}(U \setminus A) + \displaystyle\sum_{k>t} |B_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Exercício 1.15. Temos $A \subset B \cup (A \setminus B) \subset B \cup (A \triangle B)$ e portanto:

$$\mathfrak{m}^*(A) \leq \mathfrak{m}^*(B) + \mathfrak{m}^*(A \triangle B).$$

Se $\mathfrak{m}^*(B) < +\infty$ segue que:

$$\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(B) \leq \mathfrak{m}^*(A \triangle B); \tag{A.1.4}$$

note que (A.1.4) também é válida se $\mathfrak{m}^*(B) = +\infty$ já que, nesse caso, $\mathfrak{m}^*(A) < +\infty$ e $\mathfrak{m}^*(A) - \mathfrak{m}^*(B) = -\infty$. Trocando os papéis de A e B em (A.1.4) obtemos:

$$\mathfrak{m}^*(B) - \mathfrak{m}^*(A) \leq \mathfrak{m}^*(A \triangle B). \tag{A.1.5}$$

A conclusão segue de (A.1.4) e (A.1.5).

Exercício 1.16. Temos:

$$\mathfrak{m}^*(A) \leq \mathfrak{m}^*(E') \leq \mathfrak{m}^*(E) = \mathfrak{m}(E)$$

com $\mathfrak{m}^*(A) = \mathfrak{m}(E)$ e portanto $\mathfrak{m}(E') = \mathfrak{m}^*(E') = \mathfrak{m}^*(A)$. Como E' é mensurável e contém A, segue que E' é um envelope mensurável de A.

Exercício 1.17. Assuma que o conjunto E é Lebesgue mensurável. Pelo Corolário 1.4.31, existe um subconjunto A de E de tipo F_σ tal que $E \setminus A$ tem medida nula. Tome $N = E \setminus A$. Daí $E = A \cup N$ e pelo Lema 1.4.50 existe um subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ de tipo G_δ tal que $N \subset M$ e $\mathfrak{m}(M) = \mathfrak{m}(N) = 0$. Os conjuntos A e M são Boreleanos e portanto a condição (b) é satisfeita. Agora assuma que a condição (b) é satisfeita. Temos que o conjunto A é mensurável, por ser Boreleano (Corolário 1.4.36) e que o conjunto N é mensurável, já que $\mathfrak{m}^*(N) \le \mathfrak{m}(M) = 0$ (Lema 1.4.16). Logo $E = A \cup N$ é mensurável.

Exercício 1.18. Temos que $A \cup B$ é união disjunta dos conjuntos $A \setminus B$, $A \cap B$ e $B \setminus A$; logo:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A).$$

Como $\mu(A \cap B) < +\infty$, segue do Lema 1.4.46 que:

$$\mu(A \setminus B) = \mu\big(A \setminus (A \cap B)\big) = \mu(A) - \mu(A \cap B),$$

e similarmente $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$. Logo:

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \\ = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

Exercício 1.19. Note que $B_k \subset A_k$, para todo $k \ge 1$. Sejam $k, l \ge 1$ com $k \ne l$, digamos, $k > l$. Temos $B_k \cap A_l = \emptyset$ e $B_l \subset A_l$, de modo que $B_k \cap B_l = \emptyset$. Isso prova que os conjuntos $(B_k)_{k \ge 1}$ são dois a dois disjuntos. Vamos mostrar que $\bigcup_{k=1}^\infty A_k = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$. Obviamente, $\bigcup_{k=1}^\infty B_k \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Por outro lado, se $x \in \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, seja $k \ge 1$ o menor inteiro tal que $x \in A_k$; daí $x \in A_k$ e $x \notin \bigcup_{i=0}^{k-1} A_i$, de modo que, $x \in B_k$.

Exercício 1.20. Sejam $B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} A_i$, para todo $k \ge 1$, onde $A_0 = \emptyset$. Note que $B_k \subset A_k$ e $B_k \in \mathcal{A}$ para todo $k \ge 1$. Pelo resultado do Exercício 1.19, os conjuntos $(B_k)_{k \ge 1}$ são dois a dois disjuntos e:

$$\bigcup_{k=1}^\infty A_k = \bigcup_{k=1}^\infty B_k.$$

Daí:

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^\infty B_k\Big) = \sum_{k=1}^\infty \mu(B_k) \le \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k). \tag{A.1.6}$$

Exercício 1.21. Definimos os conjuntos B_k, $k \ge 1$, como na resolução do Exercício 1.20. Por (A.1.6), é suficiente mostrarmos que $\mu(B_k) = \mu(A_k)$ para todo $k \ge 1$. Obviamente $\mu(B_k) \le \mu(A_k)$. Por outro lado, temos:

$$A_k \subset B_k \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} (A_i \cap A_k);$$

aplicando o resultado do Exercício 1.20 obtemos:

$$\mu(A_k) \leq \mu(B_k) + \sum_{i=0}^{k-1} \mu(A_i \cap A_k) = \mu(B_k),$$

o que completa a demonstração.

Exercício 1.22.

(a) Temos $X \in \mathcal{A}_i$ para todo $i \in I$, de modo que $X \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Dado $A \in \mathcal{A}$ temos $A \in \mathcal{A}_i$ para todo $i \in I$ e portanto $A^c \in \mathcal{A}_i$, para todo $i \in I$; segue que $A^c \in \mathcal{A}$. Seja $(A_k)_{k \geq 1}$ uma seqüência de elementos de $\mathcal{A}$. Daí $A_k \in \mathcal{A}_i$ para todo $k \geq 1$ e todo $i \in I$, de modo que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}_i$ para todo $i \in I$ e portanto $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

(b) Se $\sigma_1[\mathcal{C}]$ e $\sigma_2[\mathcal{C}]$ são ambas σ-álgebras de partes de X satisfazendo as propriedades (1) e (2) que aparecem na Definição 1.4.35, mostremos que $\sigma_1[\mathcal{C}] = \sigma_2[\mathcal{C}]$. De fato, como $\sigma_1[\mathcal{C}]$ é uma σ-álgebra de partes de X que contém $\mathcal{C}$ e como $\sigma_2[\mathcal{C}]$ satisfaz a propriedade (2), temos que $\sigma_2[\mathcal{C}] \subset \sigma_1[\mathcal{C}]$. De modo similar mostra-se que $\sigma_1[\mathcal{C}] \subset \sigma_2[\mathcal{C}]$.

(c) Seja $\sigma[\mathcal{C}]$ a interseção de todas as σ-álgebras de partes de X que contém $\mathcal{C}$; pelo resultado do item (a), $\sigma[\mathcal{C}]$ é uma σ-álgebra de partes de X e obviamente $\mathcal{C} \subset \sigma[\mathcal{C}]$, já que $\sigma[\mathcal{C}]$ é a interseção de uma coleção de conjuntos que contém $\mathcal{C}$. Além do mais, se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de partes de X que contém $\mathcal{C}$ então $\mathcal{A}$ é um dos membros da coleção cuja interseção resultou em $\sigma[\mathcal{C}]$; logo $\sigma[\mathcal{C}] \subset \mathcal{A}$.

Exercício 1.23. Como $\sigma[\mathcal{C}_2]$ é uma σ-álgebra de partes de X que contém $\mathcal{C}_1$ e como $\sigma[\mathcal{C}_1]$ satisfaz a propriedade (2) que aparece na Definição 1.4.35 temos que $\sigma[\mathcal{C}_1] \subset \sigma[\mathcal{C}_2]$. Similarmente, $\mathcal{C}_2 \subset \sigma[\mathcal{C}_1]$ implica que $\sigma[\mathcal{C}_2] \subset \sigma[\mathcal{C}_1]$.

Exercício 1.24. A σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ é uma σ-álgebra de partes de $\mathbb{R}^n$ que contém os abertos de $\mathbb{R}^n$. Logo todo aberto de $\mathbb{R}^n$ e toda interseção enumerável de abertos de $\mathbb{R}^n$ pertence à σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ (veja Lema 1.4.37). Como todo fechado é complementar de um aberto, segue que os fechados de $\mathbb{R}^n$ e as uniões enumeráveis de fechados de $\mathbb{R}^n$ pertencem à σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 1.25. Seja $\mathcal{A}$ a σ-álgebra gerada pelos intervalos da forma $]a, b]$, com $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Como a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é a σ-álgebra gerada pelos abertos de $\mathbb{R}$, o resultado do Exercício 1.23 nos diz que, para mostrar que $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, é suficiente mostrar as seguintes afirmações:

(i) todo intervalo da forma $]a, b]$ é um Boreleano de $\mathbb{R}$;
(ii) todo aberto de $\mathbb{R}$ pertence a $\mathcal{A}$.

A afirmação (i) é trivial, já que $]a, b] =]a, b[\cup \{b\}$, onde $]a, b[$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ e $\{b\}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$. Para mostrar a afirmação (ii), observe que o Lema 1.4.23 implica que todo aberto de $\mathbb{R}$ é uma união enumerável de intervalos compactos; é suficiente mostrar então que $[a,b] \in \mathcal{A}$, para todos $a,b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. Mas isso segue da igualdade:

$$[a,b] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left]a - \tfrac{1}{k}, b\right].$$

Isso termina a resolução do item (a). Para o item (b), simplesmente observe que:

$$]a,b] =]-\infty, b] \setminus]-\infty, a],$$

e portanto a σ-álgebra gerada pelos intervalos $]-\infty, c]$ contém a σ-álgebra gerada pelos intervalos $]a,b]$.

Exercício 1.26. Suponha por absurdo que F é um fechado de $\mathbb{R}$ contido propriamente em I com $\mathfrak{m}(F) = |I|$. Seja $x \in I \setminus F$. Como F é fechado, existe $\varepsilon > 0$ com $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap F = \emptyset$. Se x é um ponto interior de I então podemos escolher $\varepsilon > 0$ de modo que $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset I$; senão, se x é uma extremidade de I, podemos ao menos garantir que um dos intervalos $[x-\varepsilon, x]$, $[x, x+\varepsilon]$ está contido em I, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Em todo caso, conseguimos um intervalo J contido em I, disjunto de F, com $|J| > 0$. Daí F e J são subconjuntos mensuráveis disjuntos de I e portanto:

$$|I| = \mathfrak{m}(I) \geq \mathfrak{m}(F \cup J) = \mathfrak{m}(F) + \mathfrak{m}(J) = |I| + |J| > |I|,$$

o que nos dá uma contradição e prova que $F = I$. Em particular, vemos que F não pode ter interior vazio.

Exercício 1.27.

(a) Consideramos primeiro o caso em que A e B têm medida exterior finita. Seja dado $\varepsilon > 0$ e sejam $(Q_k)_{k\geq 1}$ e $(Q'_l)_{l\geq 1}$ respectivamente uma seqüência de blocos retangulares m-dimensionais e uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais tais que:

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad B \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} Q'_l$$

e tais que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < \mathfrak{m}^*(A) + \varepsilon, \quad \sum_{l=1}^{\infty} |Q'_l| < \mathfrak{m}^*(B) + \varepsilon.$$

Daí $(Q_k \times Q'_l)_{k,l\geq 1}$ é uma família enumerável de blocos retangulares $(m+n)$-dimensionais tal que $A \times B \subset \bigcup_{k,l\geq 1}(Q_k \times Q'_l)$. Logo:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^*(A\times B) \leq \sum_{k,l\geq 1} |Q_k \times Q'_l| = \sum_{k,l\geq 1} |Q_k|\,|Q'_l| &= \Big(\sum_{k=1}^{\infty}|Q_k|\Big)\Big(\sum_{l=1}^{\infty}|Q'_l|\Big) \\ &< \big(\mathfrak{m}^*(A)+\varepsilon\big)\big(\mathfrak{m}^*(B)+\varepsilon\big).\end{aligned}$$

A conclusão é obtida fazendo $\varepsilon \to 0$. Consideramos agora o caso que $\mathfrak{m}^*(A) = +\infty$ ou $\mathfrak{m}^*(B) = +\infty$. Se $\mathfrak{m}^*(A) > 0$ e $\mathfrak{m}^*(B) > 0$ então

$\mathfrak{m}^*(A)\mathfrak{m}^*(B) = +\infty$ e não há nada para mostrar. Suponha então que $\mathfrak{m}^*(A) = 0$ ou $\mathfrak{m}^*(B) = 0$, de modo que $\mathfrak{m}^*(A)\mathfrak{m}^*(B) = 0$; devemos mostrar então que $\mathfrak{m}^*(A \times B) = 0$ também. Consideraremos apenas o caso que $\mathfrak{m}^*(A) = +\infty$ e $\mathfrak{m}^*(B) = 0$ (o caso $\mathfrak{m}^*(A) = 0$ e $\mathfrak{m}^*(B) = +\infty$ é análogo). Para cada $k \ge 1$, seja $A_k = A \cap [-k,k]^m$. Temos $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $\mathfrak{m}^*(A_k) < +\infty$, para todo $k \ge 1$. Logo:

$$0 \le \mathfrak{m}^*(A_k \times B) \le \mathfrak{m}^*(A_k)\mathfrak{m}^*(B) = 0,$$

ou seja, $\mathfrak{m}^*(A_k \times B) = 0$, para todo $k \ge 1$. Como:

$$A \times B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \times B),$$

segue que $\mathfrak{m}^*(A \times B) = 0$.

(b) Consideramos primeiro o caso que $\mathfrak{m}(A) < +\infty$ e $\mathfrak{m}(B) < +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existem abertos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo A e B respectivamente, de modo que $\mathfrak{m}(U) < \mathfrak{m}(A) + 1$, $\mathfrak{m}(V) < \mathfrak{m}(B) + 1$ e:

$$\mathfrak{m}(U \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2\big(\mathfrak{m}(B) + 1\big)}, \quad \mathfrak{m}(V \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2\big(\mathfrak{m}(A) + 1\big)}.$$

Daí $U \times V$ é um aberto de $\mathbb{R}^{m+n}$ contendo $A \times B$; além do mais:

$$(U \times V) \setminus (A \times B) \subset \big[(U \setminus A) \times V\big] \cup \big[U \times (V \setminus B)\big].$$

Usando o resultado do item (a) obtemos portanto:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^*\big((U \times V) \setminus (A \times B)\big) &\le \mathfrak{m}^*\big((U \setminus A) \times V\big) + \mathfrak{m}^*\big(U \times (V \setminus B)\big)\\ &\le \mathfrak{m}(U \setminus A)\mathfrak{m}(V) + \mathfrak{m}(U)\mathfrak{m}(V \setminus B)\\ &\le \mathfrak{m}(U \setminus A)\big(\mathfrak{m}(B) + 1\big) + \mathfrak{m}(V \setminus B)\big(\mathfrak{m}(A) + 1\big) < \varepsilon,\end{aligned}$$

o que mostra que $A \times B$ é mensurável. Para o caso geral, definimos $A_k = A \cap [-k,k]^m$, $B_k = B \cap [-k,k]^n$. Daí $A_k \times B_k$ é mensurável para todo $k \ge 1$ e $A \times B = \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \times B_k)$; portanto também $A \times B$ é mensurável.

(c) Mostremos primeiro que se $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ são abertos então:

$$\mathfrak{m}(U \times V) = \mathfrak{m}(U)\mathfrak{m}(V). \tag{A.1.7}$$

Pelo Lema 1.4.23 podemos escrever $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, onde $(Q_k)_{k \ge 1}$ é uma seqüência de blocos retangulares m-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos; podemos também escrever $V = \bigcup_{l=1}^{\infty} Q'_l$, onde $(Q'_l)_{l \ge 1}$ é uma seqüência de blocos retangulares n-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos. Note que $(Q_k \times Q'_l)_{k,l \ge 1}$ é uma família enumerável de blocos retangulares $(m+n)$-dimensionais com interiores dois a dois disjuntos e $U \times V = \bigcup_{k,l \ge 1}(Q_k \times Q'_l)$.

Daí, pelo Corolário 1.4.21, obtemos:

$$\mathfrak{m}(U\times V)=\sum_{k,l\geq 1}|Q_k\times Q_l'|=\sum_{k,l\geq 1}|Q_k|\,|Q_l'|=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}|Q_k|\Big)\Big(\sum_{l=1}^{\infty}|Q_l'|\Big)$$
$$=\mathfrak{m}(U)\mathfrak{m}(V).$$

Isso prova (A.1.7). Dados agora $A\subset\mathbb{R}^m$, $B\subset\mathbb{R}^n$ mensuráveis com $\mathfrak{m}(A)<+\infty$ e $\mathfrak{m}(B)<+\infty$ podemos, como no item (b), obter abertos $U\subset\mathbb{R}^m$, $V\subset\mathbb{R}^n$ contendo A e B respectivamente de modo que:

$$\mathfrak{m}^*\big((U\times V)\setminus(A\times B)\big)<\varepsilon.$$

Como os conjuntos $U\times V$ e $A\times B$ são mensuráveis e, pelo item (a), $\mathfrak{m}(A\times B)\leq\mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B)<+\infty$, obtemos:

$$\mathfrak{m}\big((U\times V)\setminus(A\times B)\big)=\mathfrak{m}(U\times V)-\mathfrak{m}(A\times B),$$

e portanto $\mathfrak{m}(U\times V)-\mathfrak{m}(A\times B)<\varepsilon$. Usando agora (A.1.7) concluímos que:

$$\mathfrak{m}(A\times B)>\mathfrak{m}(U\times V)-\varepsilon=\mathfrak{m}(U)\mathfrak{m}(V)-\varepsilon\geq\mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B)-\varepsilon;$$

fazendo $\varepsilon\to 0$, obtemos $\mathfrak{m}(A\times B)\geq\mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B)$. Provamos então a igualdade $\mathfrak{m}(A\times B)=\mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B)$, já que a desigualdade oposta já foi provada no item (a). Sejam agora $A\subset\mathbb{R}^m$, $B\subset\mathbb{R}^n$ conjuntos mensuráveis arbitrários e defina:

$$A_k=A\cap[-k,k]^m,\quad B_k=B\cap[-k,k]^n,$$

para todo $k\geq 1$. Daí $A_k\nearrow A$, $B_k\nearrow B$, $A_k\times B_k\nearrow A\times B$ e portanto:

$$\mathfrak{m}(A\times B)=\lim_{k\to\infty}\mathfrak{m}(A_k\times B_k)=\lim_{k\to\infty}\mathfrak{m}(A_k)\mathfrak{m}(B_k)=\mathfrak{m}(A)\mathfrak{m}(B),$$

onde na última igualdade usamos o resultado do Exercício 1.5.

Exercício 1.28. Se $K\subset A$ é compacto então $\mathfrak{m}(K)=\mathfrak{m}^*(K)\leq\mathfrak{m}^*(A)$, pelo Lema 1.4.4. Logo $\mathfrak{m}^*(A)$ é uma cota superior do conjunto:

$$\big\{\mathfrak{m}(K):K\subset A\text{ compacto}\big\}$$

e portanto é maior ou igual ao seu supremo, que é $\mathfrak{m}_*(A)$.

Exercício 1.29. Observe que:

$$\big\{\mathfrak{m}(K):K\subset A_1\text{ compacto}\big\}\subset\big\{\mathfrak{m}(K):K\subset A_2\text{ compacto}\big\}$$

e portanto:

$$\mathfrak{m}_*(A_1)=\sup\big\{\mathfrak{m}(K):K\subset A_1\text{ compacto}\big\}$$
$$\leq\sup\big\{\mathfrak{m}(K):K\subset A_2\text{ compacto}\big\}=\mathfrak{m}_*(A_2).$$

Exercício 1.30. Se $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ contém todos os subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ então:

$$\big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A \text{ compacto}\big\} \subset \big\{\mathfrak{m}(E) : E \subset A,\ E \in \mathcal{M}'\big\}$$

e portanto:

$$\mathfrak{m}_*(A) = \sup\big\{\mathfrak{m}(K) : K \subset A \text{ compacto}\big\} \le \sup\big\{\mathfrak{m}(E) : E \subset A,\ E \in \mathcal{M}'\big\}.$$

Por outro lado, se $E \in \mathcal{M}'$ e $E \subset A$ então segue do Corolário 1.4.59 que:

$$\mathfrak{m}(E) \le \mathfrak{m}_*(A);$$

isso mostra que $\mathfrak{m}_*(A)$ é uma cota superior do conjunto:

$$\big\{\mathfrak{m}(E) : E \subset A,\ E \in \mathcal{M}'\big\}$$

e portanto $\mathfrak{m}_*(A) \ge \sup\big\{\mathfrak{m}(E) : E \subset A,\ E \in \mathcal{M}'\big\}$.

Exercício 1.31. Se $\mathfrak{m}_*(A) < +\infty$ então para todo $r \ge 1$ existe um compacto $K_r \subset A$ com $\mathfrak{m}(K_r) > \mathfrak{m}_*(A) - \frac{1}{r}$; daí $W = \bigcup_{r=1}^{\infty} K_r$ é um F_σ contido em A e:

$$\mathfrak{m}_*(A) - \frac{1}{r} < \mathfrak{m}(K_r) \le \mathfrak{m}(W) \le \mathfrak{m}_*(A),$$

para todo $r \ge 1$, onde usamos o Corolário 1.4.59. Segue que $\mathfrak{m}(W) = \mathfrak{m}_*(A)$. Se $\mathfrak{m}_*(A) = +\infty$ então para todo $r \ge 1$ existe um compacto $K_r \subset A$ com $\mathfrak{m}(K_r) > r$ e daí $W = \bigcup_{r=1}^{\infty} K_r$ é um F_σ contido em A tal que:

$$\mathfrak{m}(W) \ge \mathfrak{m}(K_r) > r,$$

para todo $r \ge 1$; logo $\mathfrak{m}(W) = +\infty = \mathfrak{m}_*(A)$.

Exercício 1.32. Para cada $k \ge 1$, seja $W_k \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto de tipo F_σ tal que $W_k \subset A_k$ e $\mathfrak{m}(W_k) = \mathfrak{m}_*(A_k)$ (veja Exercício 1.31). Como os conjuntos W_k são dois a dois disjuntos e mensuráveis, temos:

$$\mathfrak{m}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}(W_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_*(A_k).$$

Mas $\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ é um subconjunto mensurável de $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e portanto o Corolário 1.4.59 nos dá:

$$\mathfrak{m}_*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \ge \mathfrak{m}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{m}_*(A_k).$$

Exercício 1.33. O resultado do Exercício 1.29 implica que $\big(\mathfrak{m}_*(A_k)\big)_{k\ge1}$ é uma seqüência decrescente e que $\mathfrak{m}_*(A_k) \ge \mathfrak{m}_*(A)$, para todo $k \ge 1$; logo $\big(\mathfrak{m}_*(A_k)\big)_{k\ge1}$ é convergente e:

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}_*(A_k) \ge \mathfrak{m}_*(A).$$

Para cada $k \geq 1$, o resultado do Exercício 1.31 nos dá um subconjunto W_k de A_k de tipo F_σ tal que $\mathfrak{m}(W_k) = \mathfrak{m}_*(A_k)$. Defina $V_k = \bigcup_{r=k}^{\infty} W_r$. Daí V_k é mensurável e $W_k \subset V_k \subset A_k$, donde:

$$\mathfrak{m}_*(A_k) = \mathfrak{m}(W_k) \leq \mathfrak{m}(V_k) \leq \mathfrak{m}_*(A_k),$$

onde na última desigualdade usamos o Corolário 1.4.59. Mostramos então que $\mathfrak{m}(V_k) = \mathfrak{m}_*(A_k)$, para todo $k \geq 1$. Obviamente $V_k \supset V_{k+1}$ para todo $k \geq 1$ e:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A.$$

Como $\mathfrak{m}(V_k) = \mathfrak{m}_*(A_k) < +\infty$ para algum $k \geq 1$, o Lema 1.4.48 nos dá:

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}(V_k) = \mathfrak{m}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k\Big) \leq \mathfrak{m}_*(A),$$

e portanto:

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{m}_*(A_k) \leq \mathfrak{m}_*(A).$$

A.2. Exercícios do Capítulo 2

Exercício 2.1. Se $f : X \to X'$ é constante então para todo subconjunto A de X' temos $f^{-1}(A) = \emptyset$ ou $f^{-1}(A) = X$; em todo caso, $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

Exercício 2.2. Evidentemente $\mathcal{A}|_Y$ é não vazia, já que $\mathcal{A}$ é não vazia. Seja $(A'_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência em $\mathcal{A}|_Y$; para cada $k \geq 1$ existe $A_k \in \mathcal{A}$ com $A'_k = A_k \cap Y$. Daí:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k = \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \cap Y$$

e $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$; logo $\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k \in \mathcal{A}|_Y$. Agora seja $A' \in \mathcal{A}|_Y$, de modo que $A' = A \cap Y$, com $A \in \mathcal{A}$. Temos que o complementar de A' em Y é igual à interseção do complementar de A em X com Y, ou seja:

$$Y \setminus A' = Y \setminus (A \cap Y) = (X \setminus A) \cap Y.$$

Como $X \setminus A$ está em $\mathcal{A}$, segue que $Y \setminus A' \in \mathcal{A}|_Y$.

Exercício 2.3. Pelo resultado do Exercício 2.2, temos que $\mathcal{A}|_Y$ é uma σ-álgebra de partes de Y que contém $\mathcal{C}|_Y$; logo $\mathcal{A}|_Y$ contém $\sigma[\mathcal{C}|_Y]$. Para mostrar que $\mathcal{A}|_Y$ está contido em $\sigma[\mathcal{C}|_Y]$, considere a coleção:

$$\mathcal{A}' = \big\{A \subset X : A \cap Y \in \sigma[\mathcal{C}|_Y]\big\}.$$

Verifica-se diretamente que $\mathcal{A}'$ é uma σ-álgebra de partes de X; obviamente, $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}'$. Logo $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, o que prova que $A \cap Y \in \sigma[\mathcal{C}|_Y]$, para todo $A \in \mathcal{A}$, i.e., $\mathcal{A}|_Y \subset \sigma[\mathcal{C}|_Y]$.

Exercício 2.4. De acordo com a definição da σ-álgebra de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$, se $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ então $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$; logo $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por outro lado, se

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ então também $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ (já que $A \cap \mathbb{R} = A$ é um Boreleano de $\mathbb{R}$) e portanto $A \cap \mathbb{R} = A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}}$.

Exercício 2.5. Seja $\mathcal{C}$ a coleção formada pelos intervalos da forma $[-\infty, c]$, $c \in \mathbb{R}$. Claramente $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ e portanto $\sigma[\mathcal{C}] \subset \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Vamos mostrar então que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subset \sigma[\mathcal{C}]$. Em primeiro lugar, afirmamos que:

$$\emptyset, \{+\infty\}, \{-\infty\}, \{+\infty, -\infty\} \in \sigma[\mathcal{C}], \tag{A.2.1}$$

$$\mathbb{R} \in \sigma[\mathcal{C}]. \tag{A.2.2}$$

De fato, (A.2.1) segue das igualdades:

$$\{-\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [-\infty, -k], \quad \{+\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [-\infty, k]^{\mathrm{c}},$$

e (A.2.2) segue de (A.2.1), já que $\mathbb{R} = \{+\infty, -\infty\}^{\mathrm{c}}$. Note que:

$$\mathcal{C}|_{\mathbb{R}} = \big\{ \,]-\infty, c] : c \in \mathbb{R} \big\}$$

e portanto o resultado do Exercício 1.25 nos dá $\sigma[\mathcal{C}|_{\mathbb{R}}] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$; daí, o resultado do Exercício 2.3 implica que:

$$\sigma[\mathcal{C}]|_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{A.2.3}$$

Seja $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, de modo que $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por (A.2.3), temos que existe $A' \in \sigma[\mathcal{C}]$ tal que $A \cap \mathbb{R} = A' \cap \mathbb{R}$. Daí (A.2.2) implica que $A \cap \mathbb{R} \in \sigma[\mathcal{C}]$. Finalmente, (A.2.1) implica que $A \cap \{+\infty, -\infty\} \in \sigma[\mathcal{C}]$, o que prova que $A = (A \cap \mathbb{R}) \cup \big(A \cap \{+\infty, -\infty\}\big) \in \sigma[\mathcal{C}]$.

Exercício 2.6. Pelo Corolário 2.1.18, a função

$$h : \big(f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R})\big) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por $h(x) = f(x) - g(x)$ é mensurável. Logo o conjunto:

$$h^{-1}(0) = \big\{x \in f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R}) : f(x) = g(x)\big\}$$

é mensurável. A conclusão segue da igualdade:

$$\begin{aligned}\big\{x \in X : f(x) = g(x)\big\} = \big(f^{-1}(+\infty)\cap g^{-1}(+\infty)\big)\cup\big(f^{-1}(-\infty)\cap g^{-1}(-\infty)\big)\\ \cup \big\{x \in f^{-1}(\mathbb{R}) \cap g^{-1}(\mathbb{R}) : f(x) = g(x)\big\}.\end{aligned}$$

Exercício 2.7. Vamos usar o Lema 2.1.13. Temos que os conjuntos:

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\big\}, \tag{A.2.4a}$$

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y < 1\big\}, \tag{A.2.4b}$$

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -1\big\}, \tag{A.2.4c}$$

constituem uma cobertura enumerável de $\mathbb{R}^2$ por Boreleanos. É suficiente então mostrar que a restrição de f a cada um desses Boreleanos é Borel mensurável. A restrição de f ao conjunto (A.2.4a) é contínua, e portanto Borel mensurável (veja Lema 2.1.15). A restrição de f ao conjunto (A.2.4b) é um limite pontual de funções contínuas e portanto é Borel mensurável, pelo

Corolário 2.1.24 (na verdade, essa restrição de f também é contínua, já que a série em questão converge uniformemente, pelo teste M de Weierstrass). Finalmente, a restrição de f ao conjunto (A.2.4c) é Borel mensurável, sendo igual à composição da função contínua $(x, y) \mapsto x + y$ com a função Borel mensurável $\chi_{\mathbb{Q}}$.

Exercício 2.8.

(a) Como $X \setminus X_1$ tem medida nula, temos que todo subconjunto de $X \setminus X_1$ é mensurável (recorde Lema 1.4.16). Portanto, a restrição de f a $X \setminus X_1$ é automaticamente mensurável (seja lá qual for a função f). Como os conjuntos $X \setminus X_1$ e $X_1 = X \setminus (X \setminus X_1)$ são mensuráveis, segue do Lema 2.1.13 que f é mensurável.

(b) Como $f = g$ quase sempre, existe um subconjunto X_1 de X tal que $X \setminus X_1$ tem medida nula e tal que f e g coincidem em X_1. Como f é mensurável, segue que $g|_{X_1} = f|_{X_1}$ também é mensurável; logo, o resultado do item (a) implica que g é mensurável.

(c) Basta observar que $g = \liminf_{k\to\infty} f_k$ quase sempre e usar o resultado do item (b) juntamente com o Corolário 2.1.23.

Exercício 2.9. Devemos mostrar que se A é um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^m$ então $\pi^{-1}(A)$ é um subconjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^{m+n}$. Mas $\pi^{-1}(A) = A \times \mathbb{R}^n$ e portanto a conclusão segue do resultado do item (b) do Exercício 1.27.

Exercício 2.10. Considere a função $\phi : X \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(x, y) = y - f(x)$, para todos $x \in X$, $y \in \mathbb{R}^n$. Obviamente:

$$\mathrm{gr}(f) = \phi^{-1}(0).$$

Considere a projeção $\pi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ nas primeiras m coordenadas. Temos que π é contínua e portanto Borel mensurável; daí $X \times \mathbb{R}^n = \pi^{-1}(X)$ é Boreleano, caso X seja Boreleano. Além do mais, pelo resultado do Exercício 2.9, $X \times \mathbb{R}^n$ é Lebesgue mensurável, caso X seja Lebesgue mensurável. Para concluir a demonstração, vamos verificar que:

- ϕ é Borel mensurável se f for Borel mensurável;
- ϕ é mensurável se f for mensurável.

De fato, temos que ϕ é igual à diferença entre a função contínua $(x, y) \mapsto y$ e a função $(x, y) \mapsto f(x)$, que é simplesmente a composição da restrição de π a $X \times \mathbb{R}^n$ com f. A conclusão segue do resultado do Exercício 2.9.

Exercício 2.11.

(a) Se f é integrável então, por definição, f^+ e f^- são integráveis, donde $|f| = f^+ + f^-$ é integrável. Reciprocamente, se $|f|$ é integrável então f^+ e f^- são integráveis, já que $0 \le f^+ \le |f|$ e $0 \le f^- \le |f|$. Segue que f é integrável.

(b) Temos:

$$\Big|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\Big| = \Big|\int_X f^+\,\mathrm{d}\mu - \int_X f^-\,\mathrm{d}\mu\Big| \le \Big|\int_X f^+\,\mathrm{d}\mu\Big| + \Big|\int_X f^-\,\mathrm{d}\mu\Big|$$
$$= \int_X f^+ + f^-\,\mathrm{d}\mu = \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

Exercício 2.12. Seja $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$. Daí $(g_n)_{n\ge1}$ é uma seqüência de funções mensuráveis não negativas com $g_n \nearrow f$. Segue do Teorema 2.3.3 que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Exercício 2.13. Obviamente $\nu_f(\emptyset) = 0$, pelo Lema 2.4.10. Seja $(E_k)_{k\ge1}$ uma seqüência de subconjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos de X. Temos:

$$f\chi_E = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{E_k},$$

e portanto o Lema 2.3.4 e o resultado do Exercício 2.12 implicam:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\nu_f(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_X f\chi_{E_k}\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_E\,\mathrm{d}\mu = \nu_f(E).$$

Exercício 2.14.

(a) Se a função f é não negativa, a afirmação segue do resultado do Exercício 2.13. No caso geral, temos:

$$\int_A f^+\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f^+\,\mathrm{d}\mu, \quad \int_A f^-\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f^-\,\mathrm{d}\mu,$$

e a conclusão segue subtraindo as duas igualdades acima.

(b) Se a função f é não negativa, a afirmação segue do resultado do Exercício 2.13 e do Lema 1.4.48. No caso geral, temos:

$$\int_A f^+\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_{A_k} f^+\,\mathrm{d}\mu, \quad \int_A f^-\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_{A_k} f^-\,\mathrm{d}\mu,$$

e a conclusão segue subtraindo as duas igualdades acima.

(c) Análogo ao item (b), observando que se $f|_{A_1}$ é integrável então $\int_{A_1} f^+\,\mathrm{d}\mu < +\infty$ e $\int_{A_1} f^-\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

Referências Bibliográficas

[1] E. Mendelson, *Introduction to mathematical logic*, Chapman & Hall, London, 1997, x+440 pgs.

Lista de Símbolos

Índice Remissivo

D